Referencia bibliográfica

Ferro, J. (1966). *Los procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado ideados por W. V. O. Quine* [Tesis para optar el grado de Bachiller en Letras] Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Letras y Ciencias Humanas. Unidad de Pregrado.

Autor	Juan B. Ferro
Título	Los procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado ideados por W. V. O. Quine
País de publicación	Perú
Fecha de publicación	1966
Tipo de publicación	Tesis de Bachiller
Idioma	Español

Resumen

La presente tesis examina los procedimientos decisorios desarrollados por W. V. O. Quine para fórmulas monádicas de primer grado, abordando su aplicabilidad en la lógica formal. Juan B. Ferro describe y evalúa en detalle tres métodos de decisión creados por Quine, que buscan determinar la validez de fórmulas en sistemas lógicos. La investigación discute el procedimiento QS, el cual se basa en una evaluación tabular para resolver problemas de decisión en expresiones monádicas, analizando sus ventajas y limitaciones en comparación con otros métodos. Asimismo, se exploran las técnicas de reducción y el impacto de los cuantificadores y operadores lógicos en la efectividad de estos métodos. La tesis concluye que los procedimientos de Quine representan una contribución significativa, aunque imperfecta, a la lógica matemática y la teoría de la decisión.

Palabras clave	Procedimientos decisorios; Monádicas, W. V. O. Quine; Teoría de la decisión; Lógica matemática.
Campo del conocimiento del OCDE	Filosofía
Tipo de trabajo de investigación	Tesis
Nombre del grado	Bachillerato
Grado académico	Bachiller en Letras
Institución que otorga el grado	Universidad Nacional Mayor de San Marcos

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE LETRAS Y CIENCIAS HUMANAS

JUAN B. FERRO

LOS PROCEDIMIENTOS DECISORIOS PARA FORMULAS MONADICAS DE PRIMER GRADO IDEADOS POR W. V. O. QUINE

(TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE BACHILLER EN LETRAS)

LIMA - PERU

1966

I N D I C E

Para Angela, con profunda gratitud

C A P I T U L O I

Introducción

1. El problema de la decisión constituye en la Lógica Moderna "das Problem der Auffindung allgemeiner Methoden zur Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. über die Erfüllbarkeit logischer Formeln" (*). O, para decirlo más circunstanciadamente, consiste en hallar un procedimiento algorítmico que permita, para toda fórmula construída de acuerdo a ciertos preceptos, determinar si es o no lógicamente verdadera, es decir, si resulta o no verdadera, en cualquier universo no vacío, para toda interpretación de sus letras proposicionales, para toda interpretación de sus letras predicativas, definidas en dicho universo, para la interpretación adoptada de cuantificadores y conectivas y para toda elección de objetos de dicho universo como interpretación de sus variables individuales (**).

Un procedimiento tal, que se acostumbra llamar decisorio, cumple un importante cometido en Lógica deductiva. A ésta, en efecto, le interesa saber con certeza cuándo una fórmula se deriva o deduce de otra u otras y cuándo no, y dicha certeza es sólo posible si y sólo si es o no lógicamente verdadera o válida la fórmula condicional que tiene por antecedente la premisa(o

(*) Hilbert-Bernays, Grundlagen, I, p. 8. (Sobre la manera de citar y hacer referencias, véase Anexo II, Bibliografía, infra).
(**) Véanse Hilbert-Ackermann, Lógica Teórica, III, 3, y Quine, Métodos, p. 200. Este último distinguió, en una época, entre validez "cuantificacional", caracterizada en el texto, y validez "composicional", que se da cuando la fórmula es una "truth-function" tautológica o cuando la fórmula cuantificada resulta de substituir las letras proposicionales de una truth-function tautológica por fórmulas cuantificadas de cualquier especie. En lo que sigue, "l-verdad" o "validez" serán términos usados en su sentido más amplio, que abarca los dos mencionados, mientras que "validez composicional" (o "c-validez") tendrá el mismo significado restricto que le señala Quine. De manera similar se dirá "c-consistente", "c-inconsistente", "c-implicación", etc.

su conjunción, si son más de una) y por consecuente la conclusión. Ahora bien: un algoritmo o procedimiento decisorio para probar la validez o l-verdad de una fórmula se distingue de todos los demás tipos de prueba por ser terminante, mecánico y general, de modo que una vez finalizada la serie de operaciones que prescribe se debe ya saber definitiva e inequívocamente si la fórmula dada es l-verdadera o no. Si se admite, por otra parte, que un procedimiento no algorítmico, de no llegar a un resultado afirmativo, nada garantiza, ni siquiera la posibidad de llegar o no llegar alguna vez a un resultado (*), habrá de concederse que la solución del problema general de determinar si una fórmula cualquiera es o no consecuencia de otra u otras y la solución del respectivo problema decisorio son una y la misma cosa. De esta manera el problema de la decisión se convierte en el problema central de la Lógica.

Y de la Lógica Matemática especialmente, puesto que su solución, de haberla, haría de las matemáticas una "ungeheure Trivialität" (**), ya que bastaría ser capaz de leer, escribir y cumplir sistemáticamente un juego de prescripciones precisas para saber, en todo caso concebible, si una expresión matemática cualquiera es o no un teorema, es decir, si dicha expresión es deducible o no de los axiomas de un sistema.

Nada debe extrañar, por tanto, que muchos y notables autores, a partir de los primeros esfuerzos sistemáticos de Löwenheim, se empeñaran ardorosamente en la solución del Entscheidungsproblem. Obtuvieron de paso algunos resultados parciales, algoritmos para resolver ciertos tipos de fórmulas, pero una solución general, esto es, el algoritmo decisorio para toda

---

(*) "Si un esquema es válido, la rutina que muestra la validez funcionará; pero si no lo es, esa rutina puede funcionar indefinidamente dejándonos en la expectativa por toda la eternidad". (Quine, Métodos, p. 260).

(**) Behmann, Algebra der Logik, p. 166.

clase de fórmulas empleadas en Lógica, no pudo ser descubierto, y todavía en 1934 nada permitía sospechar su inexistencia (*). Cupo a Church demostrar, dos años más tarde, que "the general case of the Entscheidungsproblem of the engere Funktionenkalkül is unsolvable" (**). Pese a algunos aspectos aún pendientes, nadie ha puesto seriamente en duda tal conclusión.

A partir de entonces, pisando tierra firme y con objetivos más limitados, la investigación se encaminó deliberadamente al análisis del problema de la decisión en determinados sistemas formales o en determinadas clases de fórmulas, llegando a constituir su brillante desarrollo "one of the most conspicuous features of contemporary Logic" (+). Se consiguió de este modo, entre otros resonantes logros, establecer sin ningún género de duda cómo ciertas clases de fórmulas son "decidibles" y otras no (++).

2. Entre los casos solubles se encuentra el de las fórmulas (predicativas) monádicas de primer grado, es decir, aquéllas en que aparecen cuantificadores, variables individuales, ligadas o no, variables o letras predicativas monádicas <u>libres</u>, y, eventualmente, conectivas, variables o letras proposicionales y constantes individuales.

Se conocen actualmente varios procedimientos decisorios para dicha clase de fórmulas, pero, si bien resulta un tanto

---

(*) Hilbert y Bernays escribían en ese año:"Von einer allgemeiner Lösung der Entscheidungsproblem sind wir .... weit entfernt".(Grundlagen I, p. 132)

(**) A Note, p. 41.

(+) Beth, Foundations, p. 583.

(++) El lector interesado hallará en Ackermann, Solvable Cases, una admirable presentación de dichos resultados.

exagerado Church al afirmar que "in the case of all known solu tions of the decision problem of the singulary functional calculus of first order, the interest is theoretical rather than practical, the decision method being too cumbersome for application in practice to any but the simplest well formed formulas such as those which are already in normal form or nearly so" (*), es cierto que todo hace suponer, teniendo a la vista la calidad y cantidad de esfuerzos realizados, que no existe ni podrá existir para las fórmulas monádicas una solución que, aparte de su impecabilidad teórica, esté constituída por reglas o instrucciones tan simples y fáciles de seguir - sea cual fuere la complejidad de la fórmula considerada - como las que componen el conocidísimo método de tablas de valor, algoritmo decisorio, como se sabe, para la clase de fórmulas compuestas exclusivamente de letras proposicionales y conectivas ("truth-functions").

Sea como fuere, los inconvenientes reales o supuestos de los procedimientos disponibles no pueden ser razón para desecharlos sin mayor examen y constituyen, antes bien, un acicate para descubrir entre ellos aquél cuyas desventajas sean mínimas, o pueda llegar a serlo mediante oportunas modificaciones, o, en todo caso, para proseguir indagando en busca suya. Interesa investigar entonces, con dicha finalidad, varios procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado ideados por el Profesor Willard van Orman Quine, que, a diferencia de otros, y en esto radica el especial interés que suscitan, tienen en cuenta muy principalmente las posibilidades reales de su empleo.

El primero de ellos que Quine ha publicado es el expuesto en O Sentido da Nova Logica, § 30 (1944). Muy poco después dió a la publicidad un artículo titulado "On the Logic of Quantification" (1945), donde se ofrece un procedimiento más breve

(*) Review, p. 59.

y directo que el anterior pero que, al parecer, no llegó a satisfacer del todo a su autor, ya que en una nueva obra suya, Methods of Logic (1950), aparece un tercer procedimiento decisorio, que se reproduce sin variaciones en la nueva edición revisada (1959) (*). Ninguno de estos procedimientos echa mano a recursos pertenecientes a la teoría de los conjuntos como, por ejemplo, la existencia de una clase de constantes de substitución, consistiendo en cambio todos ellos en la reducción de la fórmula monádica dada a otra equivalente, dotada de una configuración especial, y en la posterior evaluación tabular de esta última. La diferencia entre ellos, por otro lado, estriba primordialmente en la diversa configuración de la respectiva reducida y en la diferente forma de aplicación de la evaluación tabular y de la interpretación de sus resultados.

3. Estos procedimientos representan un innegable esfuerzo por hallar una solución práctica, y sobre todo utilizable, del problema de la decisión para fórmulas (predicativas) monádicas de primer grado, pero puede afirmarse sin embargo que la exposición del primero de ellos luce una brevedad y concisión casi asfixiantes y la del tercero suficiente dispersión y entrevero como para complicar innecesariamente su comprensión, por lo demás nada difícil. Si, por otro lado, la aplicación del primero y del segundo ofrece algunas dudas y tropiezos, dando lugar a cuestiones insoslayables, no contempladas ni resueltas en su presentación original, bien vale la pena exponer en detalle y analizar en debida forma estos procedimientos, teniendo como

---

(*) A Quine se deben, además, otros procedimientos mecánicos, pero como él mismo indica, no son decisorios en sentido estricto, es decir, no conducen a una decisión en todos los casos, puesto que su propósito es únicamente mostrar la validez de las fórmulas que les sean sometidas, de modo que no funcionan cuando la fórmula no es válida y debe decidirse sobre su no validez. Para mayores detalles véase Apéndice I, infra.

mira allanar su empleo y colmar los vacíos con que una lectura perfunctoria tiene por fuerza que tropezar.

Es así como la presente tesis intenta exponer con todo detalle los mencionados procedimientos, siguiendo el orden cronológico de su aparición, apreciar sus ventajas y deméritos, establecer hasta qué punto y de qué manera cumplen su cometido y, finalmente, señalar qué es en definitiva, y salvo mejor opinión, lo que puede esperarse de cada uno de ellos en la específica tarea que les compete.

La exposición trata de adherirse hasta donde es posible a la de los trabajos originales, pero la urgencia de claridad exige que en muchos pasajes, sobre todo en los referentes al procedimiento que aparece en Methods of Logic, se deje de lado el orden adoptado en dicha obra para seguir otro, que intenta ser más llano y menos intrincado.

En lo que concierne a la terminología, ha de tenerse presente que el vocabulario técnico de Quine, a más de personalísimo, ha ido variando de obra en obra, lo que dificulta las cosas para quien pretenda una exposición rigurosa e históricamente fiel de los citados métodos. Esta tesis, sin embargo, se adhiere tercamente al léxico original, aun cuando, por razones de comodidad, las voces del texto analizado serán reemplazadas en ciertas ocasiones por términos de uso corriente en la literatura lógica y que, al igual que la notación utilizada, se supondrán conocidos por quienes lean este trabajo, el cual, por lo demás, no exige para su comprensión otra cosa que un mínimo de familiaridad con las técnicas de manipulación, tanto de truth-functions, incluído el método resolutivo de Quine, cuanto de fórmulas cuantificadas de primer grado.

Quede dicho finalmente que las observaciones críticas y los agregados y modificaciones que se proponen en esta tesis nada pueden menguar el considerable valor de la obra del desta cado profesor de Harvard, y que la pertinacia y minuciosidad con que se hurgan pormenores, ínfimos en apariencia, no deben ser tenidas como producto de vana y ostentosa pedantería. Obedecen, por el contrario, a la obligación de justificar los reparos que se exponen en el lugar respectivo, y que, como no es aventurado colegir, bien pueden haber sido los mismos que movieron por un tiempo a Quine a abandonar un procedimiento tras otro, en demanda constante de aquél que se hallase definitivamente exento de molestas imperfecciones.

C A P I T U L O   II

El Procedimiento QS

1. El primer procedimiento decisorio que Quine haya dado a la publicidad, si no yerra el autor de esta tesis, es, como se dijo, el que aparece en "O Sentido da Nova Logica" (*). Según el propio Quine, se debe principalmente a Herbrand (**), pero es posible apreciar una estrecha relación entre su idea básica y algunas ideas operantes en el álgebra de clases. En lo sucesivo se le denominará procedimiento QS.

Afirma Quine que QS es un "criterio mecánico" que sirve para decidir en general "si las matrices representadas por un esquema [monádico] dado son válidas" (+). Si se tomara al pie de la letra esta caracterización, QS, por ser sólo eso, no podría ser considerado sino "medio procedimiento decisorio", ya que ni mecánico es sinónimo de decisorio, ni figura en el texto de O Sentido nada que permita suponer que sirva también para decidir si dichas matrices - de ser el caso - no son válidas (++).

Sin embargo, como el procedimiento se reduce, a fin de cuentas, al método tabular de evaluación de "truth-functions", y éste constituye un procedimiento efectivo para determinar tanto la validez como la invalidez de dichas fórmulas, QS es en realidad un procedimiento decisorio.

2. En la terminología de Sentido, "una matriz es un enunciado o bien puede convertirse en un enunciado (.....) por la a-

---

(*) Existe una traducción al castellano, hecha por Mario Bunge ("El Sentido de la nueva Lógica". Buenos Aires, Editorial Nueva Visión, 1958), a la cual se referirán todas las citas que en lo sucesivo se hagan de O Sentido.
(**) Métodos, p. 170, n.1.
(+) Sentido, p. 94.
(++) Véanse I.2,supra,y Apéndice II.

plicación de uno o más cuantificadores" (Sentido, p. 61) y enunciados, a su vez, son expresiones "sin pronombres (*) libres" (ibid., p. 68).

"Matriz", más precisamente, significa en Sentido:

a) Una fórmula elemental (es decir, una letra predicativa seguida por una o varias variables individuales), negada o no; b) La conjunción, negada o no, de fórmulas elementales, negadas o no (**); c) La fórmula compuesta por uno o más cuantificadores, negados o no, **seguidos** por una matriz en sentido estricto (+), negada o no ("cuantificativo", como se la denomina en Sentido, p. 55); y d) La fórmula compuesta por un cuantificativo, negado o no, o por la conjunción, negada o no, de varios cuantificativos, negados o no.

Así, por ejemplo, son matrices,

'~(x)~(fx.~gx).(x)fx.~(x)gx' (ibid., p. 73),
'~((x)fx.(x)gx.~(x)gx)' (loc. cit.),
'~((x)(fx.gx).~(x)gx)' (loc. cit.),
'~((x)(y)fxy.~(y)(x)fxy)' (ibid., p. 82),

y también lo son, pero en sentido estricto, 'fy' (ibid.,p.78) y '~(fx.~fx.gx)' (ibid., p. 75).

Quine distingue expresamente entre esquema y matriz (++);

(*) "Las letras 'x', 'y', etc., auxiliares de la notación cuantificacional, se llamarán pronombres lógicos" (ibid., p. 58). En lo sucesivo serán denominadas "variables individuales" o simplemente "variables", no por ser ésta una mejor designación, ni mucho menos, sino por gozar dicho término de máxima difusión.
(**) En tal caso, como en el anterior, se dirá que se trata de una matriz en sentido estricto. En esta clase de matrices pueden aparecer eventualmente, en vez de una fórmula elemental, tanto una letra proposicional como un cuantificativo. Véase esta misma sección, infra.
(+) En este caso la matriz toma el nombre, muy conocido, de "operando" o "alcance".
(++) Ibid., p. 61 y ss.

denomina esquemas a "las expresiones del tipo '$\sim$(p. $\sim$ q)' que se emplean en la teoría de la composición (*) y en las que aparecen las letras 'p', 'q', etc. "(es decir, truth-functions), y matrices a "las expresiones del tipo '(x = y)', '(y = y)', 'x es combustible', '$\sim$ x es combustible', etc., a las que se a costumbra aplicar cuantificadores". Pero como en la página 94 habla de "esquemas que tienen la forma de matriz" y de "matrices representadas por un esquema", parecería que 'esquema' debe tener para el autor alguna otra acepción que no es la del pasaje pertinente ya citado. En lo que sigue, sin embargo, y dejando sin dilucidar lo que parece constituir una clara indecisión terminológica, 'esquema' deberá dar a entender, además de truth-function, una expresión con forma de matriz. Esquema será, por tanto, cualquiera de las fórmulas que aparecen en el aparte anterior.

'Esquemas monádicos', a su vez, de acuerdo a la definición que proporciona su autor (**), son aquellos que cumplen los siguientes requisitos:

a) "Sólo exhiben 'x' como pronombre" (esto es, como varia ble).

b) "Carecen de pronombres libres" (esto es, todas las ocu rrencias de la variable están ligadas).

c) "El cuantificador '(x)' que figura en un esquema monádico nunca se repite dentro de su propio alcance a la manera de '(x)(........(x)fx........)' " (esto es, en ningún operando aparecen cuantificativos).

Como ejemplos de "típicos esquemas monádicos" (loc. cit.) el autor señala los siguientes:

(*) Así llamaba entonces Quine a la Lógica de las proposiciones sin analizar.

(**) Ibid., p. 94.

$\sim ((x)fx \,.\, (x) \sim fx)$	(p. 71,B)
$\sim ((x) \sim (fx \,.\sim gx) \,.\, (x)fx \,.\sim (x)gx)$	(p. 73,C)
$\sim (\sim (x) \sim (fx \,.\, gx) \,.\, (x) \sim fx)$	(p. 75,D)
$\sim (\sim p \,.\sim (x)fx \,.\sim (x) \sim (p \,.\sim fx))$ (*)	(p. 80,E)
$\sim ((x) \sim (gx \,.\, hx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, gx) \,.\sim (x) \sim (fx \,.\, hx))$	(p. 86,H)
$\sim ((x) \sim (gx \,.\sim hx) \,.\, (x) \sim (gx \,.\, fx) \,.\sim (x) \sim gx \,.\, (x) \sim (fx \,.\, hx))$	(p. 88,I)
$\sim (\sim (p \,.\sim (x)fx) \,.\, p \,.\sim (x)fx)$ (*)	(p. 96)

No deben considerarse como esquemas monádicos las siguientes fórmulas:

$\sim ((x)fx \,.\sim fy)$	(p. 68,A)
$\sim ((x)(y)fxy \,.\sim (y)(x)fxy)$	(p. 82,F)
$\sim (\sim (y) \sim (x) \sim fxy \,.\sim (x) \sim (y)fxy)$	(p. 85,G)

3. Existe un "criterio mecánico" (**), en el caso de los esquemas monádicos, para "decidir, en general, si las matrices representadas por un esquema (+) dado son válidas" (ibid., p. 94). Aunque nada se diga explícitamente, se da por convenido que el universo no es vacío y que no se tratará de la decisión de esquemas monádicos composicionalmente válidos, como, por ejemplo, '$\sim ((x)(fx \,.\sim gx) \,.\, (x)(hx \,.\sim fx) \,.\sim (x)(fx \,.\sim gx))$', que es válido por resultar de la substitución ordenada y completa de 'p' y 'q' en el esquema tautológico '$\sim (p.q \,.\sim p)$' por '$(x)(fx \,.\sim gx)$' y '$(x)(hx \,.\sim fx)$', respectivamente. (++)

Sea S un esquema monádico cuyas letras predicativas son 'f', 'g',.... y que carece de letras proposicionales. Para "probar su validez" (ibid., p. 95) debe procederse primero a

(*) 'p' representa en esta fórmula una matriz "que no contiene 'x' como pronombre libre" (loc. cit.).

(**) "Procedimiento" sería un término más adecuado. Téngase presente, además, que no es lo mecánico lo esencial de un procedimiento decisorio.

(+) Debe leerse "esquema monádico".

(++) Esta doble estipulación se extiende a los demás procedimientos que se examinarán en los capítulos siguientes. Véase, sin embargo, la sección 9, infra.

transformarlo previamente en lo que Church ha denominado "forma normal de Quine" (*) y que se mencionará abreviadamente con la letra 'C', procediéndose luego a evaluar tabularmente la expresión '$\sim$ (A . $\sim$ C)', donde 'A' representa un esquema que luego se describirá, y a interpretar el resultado obtenido. Este proceso, en detalle, incluye las fases siguientes: (**)

a) Transformación previa de S, mediante conocidas equivalencias de la Lógica Proposicional, en un esquema monádico que sólo posea las conectivas '.' y '$\sim$'. Sea S, por ejemplo,

$$(x)(fx \supset gx) \,.\, (x)(gx \supset hx) . \supset . (x)(fx \supset hx) \,.$$

Modificándolo de acuerdo a lo prescrito, se tiene:

$$\sim[(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(gx.\sim hx).\sim(x)\sim(fx.\sim hx)] \qquad S_1$$

b) Substitución de todos los cuantificadores existenciales que puedan aparecer en S por el cuantificador universal, de acuerdo a conocidas reglas de intercambio de cuantificadores.

c) Modificación de cada uno de los cuantificativos simples de S_1 a fin de permitir que cada uno de ellos

---

(*) Review, p. 59. Poco después advirtió que era una denominación incorrecta "since it was first used....by Herbrand" (JSL 15, 1950, p. 199). Kneale and Kneale (Development, p. 726) atribuyen erróneamente esta forma normal a Behmann, confundiéndola con el esquema básico obtenido por éste a partir de una forma normal prenex mediante la internación de cuantificadores (véase IV.6,infra). Sobre la constitución de un esquema o fórmula básica, véase III.1,infra.

(**) Las dos primeras, que no aparecen en Sentido, son añadidas aquí dada la necesidad de llevar cualquier esquema monádico a la especialísima forma en que Quine escribía entonces los esquemas monádicos: utilizando únicamente el cuantificador universal y las conectivas '.' y '$\sim$'. Como es natural, la obligación de cumplirlas depende exclusivamente de la constitución de S.

exhiba todas las letras predicativas que aparecen en S_1. (Ninguno de los tres que integran el esquema usado como ejemplo posee en su respectivo operando las tres letras predicativas 'f', 'g' y 'h').

La modificación prescrita consiste en "completar" cada operando que lo requiera, uniéndole por conjunción tantos esquemas de la forma '$\sim(\alpha x \,.\sim \alpha x)$', en la que '$\alpha$' representa la letra predicativa requerida, cuantos fueren menester (*). El primer cuantificativo de S_1, por ejemplo, quedará transformado en

'(x)~[fx.~gx.~(hx.~hx)]' ,

el segundo en '(x)~[gx.~hx.~(fx.~fx)]' ,

y el tercero en '(x)~[fx.~hx.~(gx.~gx)]' .

d) Reemplazo de cada uno de los operandos ya "completos" por lo que Quine titula su forma canónica, esto es, una conjunción de conjunciones negadas, debiendo exhibir cada una de éstas, sólo una vez, y ordenadas alfabéticamente, todas las letras predicativas, negadas o no individualmente (**).

Examínese el primer cuantificativo, ya "completado", de S_1. Su operando no se halla en forma canónica y debe por tanto ser reducido a ella mediante el procedimiento expuesto por el autor (+) y que se explica a continuación:

1) Evalúese tabularmente el operando

'~[fx.~gx.~(hx.~hx)]'.

Así se obtiene la siguiente tabla:

(*) Esta transformación no es otra que la operación denominada por Quine "intercambio de equivalentes composicionales" (Ibid., p. 76) y se justifica fácilmente recordando la ley 'p. V eq. p'.

(**) Véase Sentido, p. 26/28 y p. 94. Se trata en realidad de una forma normal conjuntiva, donde 'p', 'q', etc. se hallan reemplazadas por fórmulas elementales.

(+) Ibid., p. 94.

fx	gx	hx	$\sim$ [fx . $\sim$ gx . $\sim$ (hx . $\sim$ hx)]
V	V	V	V V F F V
V	V	F	V V F F V
V	F	V	F V V V V
V	F	F	F V V V V
F	V	V	V F F F V
F	V	F	V F F F V
F	F	V	V F V F V
F	F	F	V F V F V

2) Considérense los valores de 'fx', 'gx' y 'hx' sólo en los arreglos que han resultado falsos:

fx	gx	hx
V	F	V
V	F	F

3) Constrúyanse tantas conjunciones con 'fx', 'gx' y 'hx' como arreglos falsos hayan resultado (*), negando tales componentes donde aparecen como falsos en el correspondiente arreglo, según el cuadro anterior:

$$fx \,.\, \sim gx \,.\, hx$$
$$fx \,.\, \sim gx \,.\, \sim hx$$

4) Niéguese cada una de estas conjunciones y únanse a su vez mediante conjunción. El esquema así obtenido

$$\sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, hx) \,.\, \sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, \sim hx)$$

será la forma canónica buscada y el primer cuanti-

(*) En caso de resultar c-válido el operando cuya forma canónica se trata de hallar, ésta se obtiene mediante un procedimiento especial. (Véase la sección 5, infra) ficativo quedará convertido en su equivalente

$$(x)[\sim(fx \cdot \sim gx \cdot hx) \cdot \sim(fx \cdot gx \cdot \sim hx)] .$$

En forma similar se obtienen las formas canónicas de los operandos de los cuantificativos restantes, las mismas que son

$$(x)[\sim(fx \cdot gx \cdot \sim hx) \cdot \sim(\sim fx \cdot gx \cdot \sim hx)]$$

y

$$\sim(x)[\sim(fx \cdot gx \cdot \sim hx) \cdot \sim(fx \cdot \sim gx \cdot \sim hx)] .$$

e) Distribución de los cuantificadores, es decir, todo cuantificativo de la forma '$(x)(\sim \emptyset x \cdot \sim \emptyset' x \ldots)$' deberá ser reemplazado por una conjunción de la forma '$(x) \sim \emptyset x \cdot (x) \sim \emptyset' x \ldots\ldots$' (*), que será la <u>forma normal</u> del respectivo cuantificativo. De modo que las formas normales de los tres cuantificativos de S_1 serán, respectivamente,

$$(x) \sim (fx \cdot \sim gx \cdot hx) \cdot (x) \sim (fx \cdot \sim gx \cdot \sim hx),$$

$$(x) \sim (fx \cdot gx \cdot \sim hx) \cdot (x) \sim (\sim fx \cdot gx \cdot \sim hx)$$

y

$$\sim [(x) \sim (fx \cdot gx \cdot \sim hx) \cdot (x) \sim (fx \cdot \sim gx \cdot \sim hx)] .$$

Substituyendo ahora cada cuantificativo de S por su correspondiente forma normal se obtiene

---

(*) Obsérvese que cada uno de los componentes de la forma normal de un cuantificativo es siempre un cuantificador universal, negado o no, seguido por una de las conjunciones negadas que forman parte de la forma canónica del operando de dicho cuantificativo. Ejemplos de estos componentes, que conviene denominar "cuantificativos típicos", son '$\sim (x) \sim (fx \cdot gx \cdot hx)$', '$(x) \sim (fx \cdot gx)$', '$(x) \sim fx$', '$\sim (x)fx$' [$= \sim (x) \sim (\sim fx)$] .

$$\sim\{(x)\sim(fx\cdot\sim gx\cdot hx)\cdot(x)\sim(fx\cdot\sim gx\cdot\sim hx)\cdot$$
$$\cdot(x)\sim(fx\cdot gx\cdot\sim hx)\cdot(x)\sim(\sim fx\cdot gx\cdot\sim hx)\ \cdot$$
$$\cdot\sim[(x)\sim(fx\cdot gx\cdot\sim hx)\cdot(x)\sim(fx\cdot\sim gx\cdot\sim hx)]\}\quad .\quad C$$

C, que se compone exclusivamente de cuantificativos típicos, es el esquema o forma normal de S_1. No hay necesidad de ir más allá en la transformación de S_1 y lo único que resta ahora es proceder al paso siguiente.

f) Determinación de la c-validez del condicional '$\sim(A\cdot\sim C)$', donde A representa, para el caso del ejemplo, el esquema

$$\sim[(x)\sim(fx\cdot gx\cdot hx)\cdot(x)\sim(fx\cdot gx\cdot\sim hx)\cdot$$
$$\cdot(x)\sim(fx\cdot\sim gx\cdot hx)\cdot(x)\sim(fx\cdot\sim hx\cdot\sim hx)\cdot$$
$$\cdot(x)\sim(\sim fx\cdot gx\cdot hx)\cdot(x)\sim(\sim fx\cdot gx\cdot\sim hx)\cdot$$
$$\cdot(x)\sim(\sim fx\cdot\sim gx\cdot hx)\cdot(x)\sim(\sim fx\cdot\sim gx\cdot\sim hx)]\qquad (*),$$

para saber si A c-implica a C. Si así fuere, C será válido, como habrá de serlo, entonces, su equivalente S. Es por tanto indispensable evaluar el esquema

$$\sim\{\sim[(x)\sim(fx\cdot gx\cdot hx)\cdot(x)\sim(fx\cdot gx\cdot\sim hx)\cdot$$
$$\cdot(x)\sim(fx\cdot\sim gx\cdot hx)\cdot(x)\sim(fx\cdot\sim gx\cdot\sim hx)$$
$$\cdot(x)\sim(\sim fx\cdot gx\cdot hx)\cdot(x)\sim(\sim fx\cdot gx\cdot\sim hx)$$
$$\cdot(x)\sim(\sim fx\cdot\sim gx\cdot hx)\cdot(x)\sim(\sim fx\cdot\sim gx\cdot\sim hx)]$$
$$\cdot[(x)\sim(fx\cdot\sim gx\cdot hx)\cdot(x)\sim(fx\cdot\sim gx\cdot\sim hx)$$
$$\cdot(x)\sim(fx\cdot gx\cdot\sim hx)\cdot(x)\sim(\sim fx\cdot gx\cdot\sim hx)$$
$$\cdot\sim((x)\sim(fx\cdot gx\cdot\sim hx)\cdot(x)\sim(fx\cdot\sim gx\cdot\sim hx))]\}.$$

(*) En general, si n es el número de letras predicativas que aparecen en S, A es la negación de la conjunción de los n distintos cuantificativos típicos que se pueden formar con n letras predicativas. No es difícil ver cómo A está constituída de tal manera que si se eliminan los cuantificadores y se aplica la equivalencia de De Morgan, A resulta ser la forma normal disyuntiva perfecta de un esquema tautológico, en el que 'fx', 'gx', 'hx'....... hacen las veces de letras proposicionales .

No es preciso aquí, por suerte, efectuar toda la tabla, pues teniendo en cuenta únicamente el consecuente C y substituyendo los cuantificativos que la integran por 'p', 'q', etc., se obtiene

$$\sim[p.q.r.s.\sim(r.q)] \quad ,$$

que es un esquema c-válido, como se puede establecer fácilmente. De manera que '$\sim(A.\sim C)$' es también c-válido, puesto que todo condicional cuyo consecuente es c-válido es él mismo c-válido, y C está c-implicado por A. Por ello C es válido y S, su equivalente, también lo es, Se ha llegado así a la decisión buscada (*).

4. Se resuelven a continuación algunos problemas de decisión para esquemas monádicos bastante simples, lo que servirá para ilustrar adecuadamente la aplicación de QS.

I) $$(x)fx \supset (\exists x)fx \qquad S$$

Reduciendo a la notación de Sentido:

$$\sim[(x)fx.\sim(\exists x)fx] \qquad S_1$$
$$\sim[(x)fx.(x)\sim fx]$$

S_1 se halla en forma normal C, de manera que sólo hace falta construir el condicional para la decisión, que es:

$$\sim[\sim\{(x)\sim fx.(x)\sim\sim fx\}.\sim\sim\{(x)fx.(x)\sim fx\}]. \qquad \sim(A.\sim C)$$

Eliminando las dobles negaciones se obtiene

$$\sim[\sim\{(x)\sim fx.(x)fx\}.\{(x)fx.(x)\sim fx\}] \quad ,$$

y, echando mano a letras proposicionales,

$$\sim[\sim(p.q).q.p] \quad .$$

(*) Es posible, como ilustra el ejemplo del texto, simplificar este último paso de QS. Cuando C sea c-válido no será preciso evaluar '$\sim(A.\sim C)$', pero de no serlo, esta evaluación no puede dejar de efectuarse (Sentido, § 30, passim). Sobre este punto, tratado in extenso, véase la sección 9, infra.

A implica a C y por lo tanto S es válido o l-verdadero.

II) $(\exists x)fx \supset (x)fx$ S

$\sim[(\exists x)fx \cdot \sim (x)fx]$ S_1

$\sim[\sim (x) \sim fx \cdot \sim (x)fx]$

Como en el ejemplo anterior, S_1 se halla en forma normal C. Construyendo y evaluando el condicional para la decisión:

$\sim[\sim \{(x) \sim fx \cdot (x) \sim\sim fx\} \cdot \sim\sim \{\sim (x) \sim fx \cdot \sim (x)fx\}]$ $\sim(A \cdot \sim C)$

$\sim[\sim \{(x) \sim fx \cdot (x)fx\} \cdot \{\sim (x) \sim fx \cdot \sim (x)fx\}]$

$\sim[\sim (p \cdot q) \cdot \sim q \cdot p]$

A no c-implica a C. S, en consecuencia, no es válido.

III) $(\exists x)(fx \cdot gx) \cdot (\exists x)(gx \cdot hx) \cdot \supset \cdot (\exists x)(fx \cdot hx)$ S

$\sim[\sim (x) \sim (fx \cdot gx) \cdot \sim (x) \sim (gx \cdot hx) \cdot (x) \sim (fx \cdot hx)]$ S_1

Buscando las formas canónicas de los operandos de los cuantificativos que exhibe S_1 y distribuyendo luego los cuantificadores para obtener las formas normales de cada uno de aquellos:

a)

fx	gx	hx	$\sim(fx \cdot gx)$	$\cdot$	$\sim(hx \cdot \sim hx)$
V	V	V	F	V	F V
V	V	F	F	V	F V
V	F	V	V	F	V V
V	F	F	V	F	V V
F	V	V	V	F	V V
F	V	F	V	F	V V
F	F	V	V	F	V V
F	F	F	V	F	V V

$\sim(x)[\sim (fx \cdot gx \cdot hx) \cdot \sim (fx \cdot gx \cdot \sim hx)]$ FC_1

$\sim[(x) \sim (fx \cdot gx \cdot hx) \cdot (x) \sim (fx \cdot gx \cdot \sim hx)]$ Q_1

b)

fx .	gx .	hx	$\sim$ (gx .	hx) . $\sim$	(fx . $\sim$ fx)
V	V	V	F	V	F V
V	V	F	F	V	F V
V	F	V	V	F	V V
V	F	F	V	F	V V
F	V	V	V	F	V V
F	V	F	V	F	V V
F	F	V	V	F	V V
F	F	F	V	F	V V

$\sim(x)[\sim(fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, \sim(\sim fx \,.\, gx \,.\, hx)]$ $\qquad FC_2$

$\sim[(x)\sim(fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, (x)\sim(\sim fx \,.\, gx \,.\, hx)]$ $\qquad Q_2$

c)

fx .	gx .	hx	$\sim$ (fx .	hx) . $\sim$	(gx . $\sim$ gx)
V	V	V	F	V	F V
V	V	F	F	V	F V
V	F	V	V	F	V V
V	F	F	V	F	V V
F	V	V	V	F	V V
F	V	F	V	F	V V
F	F	V	V	F	V V
F	F	F	V	F	V V

$(x)[\sim(fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, \sim(fx \,.\, \sim gx \,.\, hx)]$ $\qquad FC_3$

$(x)\sim(fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, (x)\sim(fx \,.\, \sim gx \,.\, hx)$ $\qquad Q_3$

Substituyendo los cuantificativos de S_1 por sus respectivas formas normales Q_1, Q_2 y Q_3 :

$$\begin{aligned}\sim[\,\sim\{(x)\sim(fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, (x)\sim(fx \,.\, gx \,.\, \sim hx)\}\\ .\sim\{(x)\sim(fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, (x)\sim(\sim fx \,.\, gx \,.\, hx)\}\\ .(x)\sim(fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, (x)\sim(fx \,.\, \sim gx \,.\, hx)]\end{aligned} \qquad C$$

El condicional final es

$$\sim\big[\sim[(x)\sim(fx \cdot gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(fx \cdot gx \cdot \sim hx)$$
$$\cdot\ (x)\sim(fx \cdot \sim gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(fx \cdot \sim gx \cdot \sim hx)$$
$$\cdot\ (x)\sim(\sim fx \cdot gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(\sim fx \cdot gx \cdot \sim hx)$$
$$\cdot\ (x)\sim(\sim fx \cdot \sim gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(\sim fx \cdot \sim gx \cdot \sim hx)]$$
$$\cdot \sim\sim[\sim\{(x)\sim(fx \cdot gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(fx \cdot gx \cdot \sim hx)\} \cdot$$
$$\cdot \sim\{(x)\sim(fx \cdot gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(\sim fx \cdot gx \cdot hx)\}$$
$$\cdot\ (x)\sim(fx \cdot gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(fx \cdot \sim gx \cdot hx)]\big] \cdot$$

Reemplazando en el condicional los cuantificativos por letras proposicionales:

$$\sim\{\sim[p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot u \cdot w \cdot x] \cdot \sim\sim[\sim(p \cdot q) \cdot \sim(p \cdot t) \cdot p \cdot r]\}$$

Como esta truth-function no es tautológica, A no c-implica a C y S, por tanto, no es válido.

IV) $(x)(fx \supset gx) \cdot (x)(gx \supset hx) \cdot (\exists x)fx \cdot \supset \cdot (\exists x)(fx \cdot hx)$ S

$\sim[(x)\sim(fx \cdot \sim gx) \cdot (x)\sim(gx \cdot \sim hx) \cdot \sim(x)\sim fx \cdot (x)\sim(fx \cdot hx)]$ S_1

Reduciendo a sus formas normales los cuatro cuantificativos que exhibe S_1:

a) $\sim(fx \cdot \sim gx) \cdot \sim(hx \cdot \sim hx)$

$(x)\sim(fx \cdot \sim gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(fx \cdot \sim gx \cdot \sim hx)$

b) $\sim(gx \cdot \sim hx) \cdot \sim(fx \cdot \sim fx)$

$(x)\sim(fx \cdot gx \cdot \sim hx) \cdot (x)\sim(\sim fx \cdot gx \cdot \sim hx)$

c) $\sim fx \cdot \sim(gx \cdot \sim gx) \cdot \sim(hx \cdot \sim hx)$

$\sim[(x)\sim(fx \cdot gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(fx \cdot gx \cdot \sim hx)$
$\cdot\ (x)\sim(fx \cdot \sim gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(fx \cdot \sim gx \cdot \sim hx)]$

d) $\sim(fx \cdot hx) \cdot \sim(gx \cdot \sim gx)$

$(x)\sim(fx \cdot gx \cdot hx) \cdot (x)\sim(fx \cdot \sim gx \cdot hx)$

La forma normal de S, alterando por comodidad el orden de los componentes, es

$$\begin{aligned}\sim[(x)\sim(fx\,.\sim gx\,.\,hx)\,.\,(x)\sim(fx\,.\sim gx\,.\sim hx)\\ .\,(x)\sim(fx\,.\,gx\,.\sim hx)\,.\,(x)\sim(\sim fx\,.\,gx\,.\sim hx)\\ .\,(x)\sim(fx\,.\,gx\,.\,hx)\,.\,(x)\sim(fx\,.\sim gx\,.\,hx)\\ .\sim\{(x)\sim(fx\,.\,gx\,.\,hx)\,.\,(x)\sim(fx\,.\,gx\,.\sim hx)\\ .\,(x)\sim(fx\,.\sim gx\,.\,hx)\,.\,(x)\sim(fx\,.\sim gx\,.\sim hx)\}].C\end{aligned}$$

C es c-válido, como lo prueba la siguiente truth-function tautológica :

$$\sim[p\,.\,q\,.\,r\,.\,s\,.\,t\,.\sim(t\,.\,r\,.\,p\,.\,q)]$$

A c-implica entonces a C y S es válido (*). No ha habido necesidad de construir, por superfluo, el condicional '$\sim(A\,.\sim C)$'.

5. Puede suceder que un cuantificativo de la forma '$(x)\sim\emptyset x$', donde '$\sim\emptyset x$' es un operando c-válido, forme parte de un esquema monádico. No hay manera alguna, en este caso, de hallar la forma canónica de dicho operando mediante la técnica prescrita por el autor, puesto que una truth-function tautológica carece de arreglos falsos. Por dicho motivo Quine recurre a un ardid (Cf. Sentido, p. 27/28) (**).

Como la forma canónica que se trata de obtener ha de ser composicionalmente equivalente al operando '$\sim\emptyset x$', es decir, tiene que ser también c-válida, es posible construirla uniendo mediante la conjunción las fórmulas elementales fx, gx, hx,..... requeridas, más otra que será la negación de una cualquiera de aquellas y negando luego dicha conjunción. Ejemplos: la forma "canónica" de $(fx\,.\,gx\,.\supset.\,fx)$ será $\sim(fx\,.\sim fx\,.\,gx\,.......)$, y la de $(fx \equiv fx)$, $\sim(fx\,.\sim fx\,.\,gx\,......)$.

(*) Se trata, como es sabido, del esquema de un modo Bamalip con premisa existencial.
(**) Adviértase que este ardid produce una forma que en rigor no es canónica, de modo que, estrictamente hablando, los cuantificativos cuyo operando sean c-válidos jamás podrán reducirse a cuantificativos típicos.

El caso presentado no merecería mayor relieve si no fuera por la peculiar situación que se produce cuando se trata de decidir si un esquema monádico de esta especie es o no válido. Supóngase que el esquema sea

$$(x)(fx . gx .\supset. fx) \quad . \qquad S$$

La aplicación rutinaria del procedimiento conducirá al condicional

$$\sim \{\sim [(x)\sim(fx . gx) . (x)\sim(fx . \sim gx) . (x)\sim(\sim fx . gx) . (x)\sim(\sim fx . \sim gx)] . \sim (x)\sim(fx . \sim fx . gx)\} ,$$

que en manera alguna es composicionalmente válido, como debería serlo, ya que la validez de S no admite duda. Lo mismo acontecerá con todo esquema monádico compuesto exclusivamente de un cuantificativo de la especie indicada: a pesar de ser válido no siempre resultará serlo al aplicársele el procedimiento QS, tomado a la letra.

En el caso de esquemas monádicos que cuenten entre sus componentes con una cuantificación cuyo operando sea c-válido, la situación es la misma. Examínese un caso muy simple:

$$\sim [(x)\sim(fx . \sim gx) . \sim (x)\sim(fx . \sim fx)] \qquad (S)$$

$$\sim [(x)\sim(fx . \sim gx) . \sim (x)\sim(fx . \sim fx . gx)] \qquad C$$

El condicional

$$\sim [\sim \{(x)\sim(fx . gx) . (x)\sim(fx . \sim gx) . (x)\sim(\sim fx . gx) . (x)\sim(\sim fx . \sim gx)\} . \sim\{(x)\sim(fx . \sim gx) . \sim(x)\sim(fx . \sim fx . gx)\}]$$

no es c-válido y por lo tanto S no será cuantificacionalmente válido <u>de acuerdo al procedimiento QS.</u> Pero su validez es obvia y cualquier otro procedimiento lo demuestra perfectamente.

Puede pues afirmarse que, <u>tal como aparece descrito en</u>

Sentido, QS no puede garantizar la corrección de todos los resultados que se obtienen mediante su aplicación.

6. ¿A qué se debe esta anomalía? No es necesaria mayor averiguación: la presencia en C de un cuantificativo irregular, atípico o anormal, que no aparece ni puede aparecer en A, trastorna el juego de la idea de c-implicación en que reposa el mecanismo de QS.

De acuerdo a éste, en efecto, un esquema monádico S con n letras predicativas monádicas es válido si y sólo si está c-implicado, una vez substituído por otro esquema equivalente cuyos cuantificativos son típicos, por otro esquema A, compuesto por los 2^n diversos cuantificativos típicos que es posible formar con n letras predicativas. Por eso es imprescindible, si se acepta sin más la estricta noción "truth-functional" de c-validez, que C se halle compuesto exclusivamente por cuantificativos de los que aparecen en A, pues de otro modo resultaría imposible una evaluación tabular normal de '∼(A . ∼C)', que es justamente lo que sucede en los ejemplos propuestos (*).

Si bien ningún pasaje de Sentido indica el medio de remediar esta situación (ni tampoco da pie para sospecharla), es fácil apreciar que una solución práctica consiste en la asignación, al evaluar tabularmente '∼(A . ∼C)', del valor V y sólo de V a todos los cuantificativos que una vez puestos en forma normal sean del tipo '(x) ∼ (fx . ∼ fx.....)', puesto que por su

---

(*) Obsérvese que, por las mismas razones expuestas, cuando en una fórmula monádica aparecen fórmulas elementales con constantes individuales, el procedimiento QS tampoco es capaz de evitar resultados incorrectos, como puede comprobarse fácilmente al someterle '∼[(x)fx.∼fa]'. Cierto es que no se trata aquí de esquemas monádicos tal como han sido definidos por Quine, pero las fórmulas con constantes individuales son de uso frecuente, de manera que la deficiencia de QS a este respecto no puede ser pasada por alto.

naturaleza jamás pueden ser falsos (*)(**). Así, si se trata de decidir acerca de la validez de '$(x)(fx.gx. \supset .fx)$', la tabla del condicional para la decisión será

$$\sim\{\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx) .(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].\sim(x)\sim(fx.\sim fx.gx)\}$$

V	V	V	V	V
V	V	V	F	V
V	V	F	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	V	F	V
F	V	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V
F	F	V	F	V
F	F	F	V	V
F	F	F	F	V

(*) Con este criterio de asignación es evidente que se agrega un elemento no "truth-functional" a la noción de c-validez.
(**) La idea en que se basa esta solución puede ser también ventajosamente adaptada para abreviar las operaciones cuando el operando de un cuantificativo es c-inconsistente. En efecto: si sólo se asigna el valor F a un cuantificativo S de esa especie cuando se evalúa el condicional '$\sim(A.\sim C)$', se obtendrá finalmente un resultado correcto y se habrá evitado la substitución de S por su forma normal, nada menos que la conjunción de 2^n (n = número de letras predicativas que exhibe el esquema) cuantificativos típicos, y el riesgo inminente de una fatigosa tabla. Sobre una posterior abreviación, véase lo que sigue.

Como todos los arreglos son verdaderos puesto que en ellos la negación del cuantificativo atípico es F, lo que acarrea la falsedad de la conjunción negada en último término, el esquema es ahora válido y las cosas vuelven a su sitio.

Otra solución, que rebasa deliberadamente los linderos de QS, es la de utilizar cuatro reglas que forman parte de la técnica resolutiva expuesta por Quine seis años más tarde, recurso que tiene la ventaja adicional de aligerar el empleo de QS cuando el esquema básico exhibe cuantificativos con operandos c-válidos o c-inconsistentes. En estos casos se substituirán por '$\top$' o '$\bot$', respectivamente, todos los cuantificativos de dichos tipos y se procederá luego a simplificar el esquema resultante mediante la aplicación ordenada de las reglas ' '$p . \top$' eq 'p' ', ' '$p . \bot$' eq '$\bot$' ', ' '$\sim\top$' eq '$\bot$' ' y ' '$\sim\bot$' eq '$\top$' ', donde 'p' representa un esquema cualquiera.

Se habrá de alcanzar necesariamente uno de tres resultados: a) S se reduce a '$\top$' (S es válido); b) S se reduce a '$\bot$' (S no es válido); o c) S se reduce a otro esquema equivalente S' en el que no aparecen ni '$\top$' ni '$\bot$' (S es válido si y sólo si S' lo es). En los dos primeros casos se ha conseguido una decisión y el problema está resuelto. En el tercero y último falta aún aplicar QS a S', lo que no ofrece ya dificultad alguna, pues todos los cuantificadores de S' son ahora típicos. La solución de algunos casos basta para ilustrar el uso de estas reglas, potestativo por lo demás, y, como se dijo, extraño al procedimiento QS original.

I) $(x)(fx . gx .\supset. fx)$ S

$(x)\sim(fx . \sim fx . gx)$

$\top$

S es válido .

II) $\sim[(x)\sim(fx . \sim gx) . \sim(x)\sim(fx . \sim fx)]$ S

$\sim[(x)\sim(fx . \sim gx) . \sim(x)\sim(fx . \sim fx . gx)]$

$\sim [(x) \sim (fx . \sim gx) . \sim \top]$

$\sim [(x) \sim (fx . \sim gx) . \bot]$

$\sim \bot$

$\top$

S es válido .

III) $(x)fx \supset gx) . \sim (x)(gx . hx .\supset. lx : \equiv : lx \vee \sim gx \vee \sim hx)$ S

$(x)\sim(fx.\sim gx).\sim(x)\sim(fx.\sim fx.gx)$

$(x)\sim(fx.\sim gx).\sim \top$

$(x)\sim(fx.\sim gx) . \bot$

$\bot$

S no es válido.

IV) $\sim [(x) \sim (fx . \sim gx) . (x)(fx \supset fx)]$ S

$\sim [(x) \sim (fx . \sim gx) . (x) \sim (fx . \sim fx . gx)]$

$\sim [(x) \sim (fx . \sim gx) . \top]$

$\sim (x) \sim (fx . \sim gx)$ S'

Como S' ya está en forma normal no queda otra cosa que formar el condicional para la decisión:

$\sim\{\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx)$

$.(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].(x)\sim(fx.\sim gx)\}$

C no está c-implicado por A. Luego S', lo mismo que S, no es válido.

V) $\sim(\exists x)(fx. \supset .fx \vee gx). \supset .\sim(x)\sim(fx \vee hx \vee jx)$ S

$(x)(fx.\sim fx.\sim gx). \supset .\sim(x)(\sim fx.\sim hx.\sim jx)$

$\sim[(x)(fx.\sim fx.\sim gx).(x)(\sim fx.\sim hx.\sim jx)]$ (*)

$\sim[\bot . (x)(\sim fx.\sim hx.\sim jx)]$

$\sim \bot$

$\top$

S es válido.

(*) Repárese en que la forma normal del cuantificativo con operando c-inconsistente tiene 16 cuantificativos típicos y la del restante tiene a su vez catorce.

7. Existen esquemas que, no cumpliendo debidamente con los requisitos estipulados, pueden no obstante ser transformados en esquemas monádicos equivalentes, lográndose así que QS les sea aplicable indirectamente (*). En efecto: si S es un esquema no monádico y S' un esquema monádico equivalente a S, S será válido si y sólo si S' lo es, cosa que sí puede determinarse con el auxilio de QS.

Los detalles de las transformaciones requeridas según los casos, que constituyen en conjunto lo que bien podría denominarse "técnica de reducción a esquemas monádicos", así como algunos problemas que suscitan, son los siguientes (**):

a) Cuando un esquema S exhiba otra variable individual además de 'x', y siempre que cumpla con los demás requisitos, S puede ser transformado mediante la operación signada por Quine con la cifra VI (+). Esta operación, intitulada "variación alfabética de un pronombre" (loc. cit.), supone la existencia de dos matrices en sentido estricto, que sólo difieren "en que la primera exhibe un cierto pronombre libre" (loc. cit.), como es el caso de 'fx' y 'fy'. Afirma Quine que "si aplicamos a las respectivas matrices los cuantificadores que contienen los pronombres libres en cuestión, el resultado de la substitución

---

(*) Quine se limita a escribir: ".. y diversos esquemas no monádicos.... pueden convertirse en monádicos por medio de V y VI" (Sentido, p. 94). Es posible afirmar, sin embargo, que cualquier esquema no monádico - y no sólo sólo diversos esquemas - puede ser convertido en monádico mediante una aplicación exacta de las instrucciones que se darán luego. La idea directriz es la de ir "limpiando" los operandos de dentro a fuera mediante la operación (V) y, tan pronto como ésta no sea aplicable, debe hallarse la forma canónica correspondiente y distribuirse luego el cuantificador, con lo que desaparece el obstáculo y puede proseguirse sin más hasta concluir, empleándose (V) al final.

(**) La exposición de esta técnica se hace en tres incisos, correspondiendo cada uno de ellos al respectivo requisito cuya omisión se trata de remediar.

(+) Sentido, p. 83.

de uno de estos cuantificativos por otros (*), dentro de cualquier matriz válida, será válido" (loc. cit.). Por ejemplo: como '∼((x)fx.∼fz)' es válido (ibid., p. 68), si se substituye en ella '(x)fx' por '(y)fy', el esquema resultante '∼((y)fy.∼fz)' también es válido (loc. cit.).

No es cosa de aceptar sin reservas la regla de la variancia alfabética si de lo que se trata es de reducir un esquema S' para hacer factible la aplicación de QS. Como dicha regla, en efecto, es aplicable sólo cuando S es válido, y S por hipótesis no es monádico, QS no podrá emplearse y habrá que recurrir forzosamente a un procedimiento que no sea QS para saber si S es válido, (VI) procedente y QS aplicable, pero en ese caso ni QS ni su aplicación son ya necesarios, pues ya se ha decidido acerca de la validez de S.

La dificultad puede ser salvada únicamente si se enuncia la regla de variancia alfabética sin tener en cuenta la validez o invalidez de los esquemas concernidos, tal como hace el propio Quine en otras obras suyas, posteriores a Sentido (**). Conviene entonces prescindir de la operación (VI) y poner en lugar suyo lo que convendría llamar "regla de variancia alfabética en sentido lato", según la cual, si un esquema no es monádico puede enmendarse el incumplimiento de la estipulación (a) substituyendo por 'x' todas las ocurrencias de otras variables individuales en dicho esquema, siempre que los otros dos requisitos se cumplan o hayan sido satisfechos previamente.

b) Puede también un esquema S no ser monádico por ostentar variables o pronombres libres. Pero si se atiende a lo que dice Quine (ibid., p. 61), pronombre libre es aquél al que "fal

---

(*) Así reza la traducción castellana, pero no hay duda que lo correcto es "por el otro".
(**) Véanse Mathematical Logic, § 21 y Logic, p. 6.

ta un cuantificador", y en consecuencia bastará escribir a la izquierda de S el ó los cuantificadores universales que se requieran para que sea cumplido de inmediato el segundo requisito. Con este proceder se obtendrá, bien un esquema monádico, bien un esquema que no lo sea por transgresión de alguno de los otros dos. Esta segunda alternativa obligará a continuar de acuerdo a lo que prescribe el respectivo inciso de esta sección, obteniéndose así un esquema monádico equivalente a S.

c) La operación signada con (V) (ibid., p. 8.) permite intercambiar esquemas de las formas '∼(p.∼(x)fx)' y '(x)∼(p.∼fx)', donde las letras esquemáticas "representan matrices que no contienen 'x' como pronombre libre" (ibid., p. 94) y obviar, de esa manera, el incumplimiento del tercer requisito (*). Resulta así posible transformar, por ejemplo, '(x)∼[(x)∼(fx.∼gx) .∼(fx.hx)]', que no es un esquema monádico, en '∼[(x)∼(fx.∼gx) .∼(x)(fx.hx)]', que sí lo es. Debe tenerse muy presente que no siempre puede aplicarse esta operación a un esquema en su forma original. Tratándose de '(x)(fx.p)', por mencionar un caso de lo más simple, es indispensable obtener de antemano su forma normal.

8. No es mayormente explícito Quine cuando se trata de la aplicación de QS a esquemas no monádicos, pero un examen atento de sus preceptos permite hallar siempre el camino correcto, si bien harto tortuoso, hacia la solución buscada. Los siguientes ejemplos pueden ser muy provechosos para adquirir familiaridad con esta ampliación de QS.

(*) Consideradas como letras o variables proposicionales,'p', 'q', 'r', etc. pueden aparecer dentro de un operando sin afectar la legitimidad de un esquema monádico (véase 2 supra), pero ello no excluye la necesidad de extraerlas mediante la operación (V) para evitar la ulterior aparición en '∼(A.∼C)' de nocivos cuantificativos atípicos que no pueden extirpar las reglas agregadas a QS (véase sección 6 supra).

I) $$(x)(fx \cdot fy) \qquad S$$

S tiene más de una variable y una de ellas es libre. Como no es posible aún expulsar 'fy', debe hallarse primero la forma normal (*) de S, que es

$$(x)\sim(fx \cdot \sim fy) \cdot (x)\sim(\sim fx \cdot fy) \cdot (x)\sim(\sim fx \cdot \sim fy) \; . \qquad S_1$$

Aplicando (V) para expulsar 'fy' y '∼fy' de los cuantificativos de S_1:

$$\sim(\sim fy \cdot \sim(x)\sim fx) \cdot \sim(fy \cdot \sim(x)fx) \cdot \sim(\sim fy \cdot \sim(x)fx) \qquad S_2$$

De esta manera se ha subsanado una de las dos infracciones de S. Falta ahora ligar 'y', cuantificando universalmente para ello S_2 respecto a 'y'. Luego, distribuyendo el cuantificador, se obtiene

$$(y)\sim(\sim fy \cdot \sim(x)\sim fx) \cdot (y)\sim(fy \cdot \sim(x)fx) \cdot (y)\sim(\sim fy \cdot \sim(x)fx) \; . \qquad S_3$$

Pero como ahora S_3 viola el requisito (c), deben expulsarse los cuantificativos que se hallan dentro del alcance de '(y)' mediante la aplicación de (V). Se tiene entonces

$$\sim[\sim(x)\sim fx \cdot \sim(y)fy] \cdot \sim[\sim(x)fx \cdot \sim(y)\sim fy] \cdot \sim[\sim(x)fx \cdot \sim(y)fy] \; . \qquad S_4$$

Basta ahora unificar la variable respecto a 'x', pues S_4 sólo incumple el primer requisito, y simplificar hasta donde se pueda. La forma normal de S es

$$\sim[\sim(x)\sim fx \cdot \sim(x)fx] \cdot (x)fx \qquad C$$

y el condicional para la decisión

$$\sim\Big[\sim[(x)fx \cdot (x)\sim fx] \cdot \sim\{\sim[\sim(x)\sim fx \cdot \sim(x)fx] \cdot (x)fx\}\Big] .$$

Como este esquema no es c-válido, S no es l-verdadero.

(*) En toda esta sección "forma normal", como se ve inmediatamente, tiene un alcance más amplio que el convenido.

II) $(x)\sim[fx.\sim(y)\sim(fy.\sim gy)]$ S

Exportando el cuantificativo '$\sim(y)\sim(fy.\sim gy)$' y unificando la variable:

$$\sim[\sim(x)\sim(fx.\sim gx).\sim(x)\sim fx] \qquad S_1$$

Reduciendo '$\sim(x)\sim fx$' a su forma normal:

$$\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx]$$

De manera que la forma normal de S_1 resulta ser

$$\sim[\sim(x)\sim(fx.\sim gx).\sim\{(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx)\}] \qquad C$$

y el condicional para la decisión

$$\sim\{\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)$$
$$.\sim(x)\sim(fx.\sim gx).\sim[(x)\sim(fx.gx);(\sim(fx.\sim gx)]]\} .$$

A no c-implica a C y por tanto S no es válida.

III) $(x)[fx.\sim(y)\sim(fy.\sim gy)]$ S

Este ejemplo es "casi" el mismo que el anterior. Sin embargo, la "insignificante" diferencia origina una secuela muy distinta de operaciones. En efecto: el operando de (x) no está negado, de modo que es imposible aplicar la operación (V) antes de obtener la forma normal de S. Esta se obtiene de la manera corriente, si bien conviene, para mayor comodidad, utilizar 'p' provisionalmente en vez de '$\sim(y)\sim(fy.\sim gy)$'. Así se obtiene, sucesivamente,

$$(x)[\sim(fx.p).\sim(\sim fx.p).\sim(\sim fx.\sim p)]$$
$$(x)\sim(fx.p).(x)\sim(\sim fx.p).(x)\sim(\sim fx.\sim p)$$
$$(x)\sim(p.fx).(x)\sim(p.\sim fx).(x)\sim(\sim p.\sim fx)$$
$$\sim[p.\sim(x)\sim fx].\sim[p.\sim(x)fx].\sim[\sim p.\sim(x)fx]$$

$$\sim[(x)\sim(fx.\sim gx).\sim(x)\sim fx].\sim[(x)\sim(fx.\sim gx).\sim(x)fx]$$
$$.\sim[\sim(x)\sim(fx.\sim gx).\sim(x)fx]$$

Reduciendo '$\sim(x)\sim fx$' a su forma normal:

$$\sim[(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)]$$

De esta manera se puede ya obtener la forma normal de S, o sea

$$\sim[(x)\sim(fx.\sim gx).\sim\{(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)\}]$$
$$.\sim[(x)\sim(fx.\sim gx).\sim\{(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)\}]$$
$$.\sim[\sim(x)\sim(fx.\sim gx).\sim\{(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)\}]$$

A es, en este caso,

$$\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)]$$

Si apelamos a letras proposicionales, el condicional para la decisión será el siguiente:

$$\sim\{\sim(p.q.r.s).\sim[\sim\{q.\sim(r.s)\}].\sim[q.\sim(q.r.s)].\sim[\sim q.\sim(q.r.s)]\}$$

Como este condicional no es tautológico, S no es válido(*).

IV) $$(x)[fx.p. \supset .\sim(y)\sim fy] \qquad S$$

Reemplazando provisionalmente '$\sim(y)\sim fy$' por 'q' :

$$(x)(fx.p. \supset .q) \ (**). \qquad S_1$$

S_1 equivale a

$$(x)\sim(fx.p.\sim q).$$

Expulsando 'p' y 'q' mediante la operación (V):

(*) El lector puede resolver por su cuenta '$(x)[\sim fx.\sim(y)\sim(fy.\sim gx)]$' (y sepa de antemano que no es válido).

(**) No existe problema alguno cuando en un esquema aparecen dos o más componentes que deben ser expulsados, siendo perfectamente intercambiables los esquemas '$(x)\sim(p.q.r. \ldots\ldots \sim\emptyset x)$' y '$\sim(p.q.r\ldots\ldots\ldots .\sim(x)\emptyset x)$'.

$$\sim[p.\sim q.\sim(x)fx]$$

Substituyendo 'q' por '$\sim(y)\sim fy$' y unificando la variable:

$$\sim[p.(x)\sim fx.\sim(x)fx] \qquad C$$

El condicional para la decisión es

$$\sim\{\sim[(x)\sim fx.(x)fx].\sim\sim[p.(x)\sim fx.\sim(x)\sim fx]\},$$

cuya c-validez se aprecia mejor recurriendo a letras proposicionales y escribiendo la siguiente truth-function:

$$\sim[\sim(q.r).p.q.\sim q]$$

De manera que A c-implica a C y S es válido.

V) $$(x)(fx.p).\supset.(\exists x)(gx.\supset.fx.p) \quad (*) \qquad S$$

En notación de Sentido:

$$\sim[(x)(fx.p).(x)(gx.\sim(fx.p))]$$

La forma"normal"de '$(x)(fx.p)$' es

$$(x)\sim(fx.gx.\sim p).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim p).(x)\sim(\sim fx.gx.p)$$
$$.(x)\sim(\sim fx.\sim gx.p).(x)\sim(\sim fx.gx.\sim p).(x)\sim(\sim fx.\sim gx.\sim p) \;.$$

Aplicando (V) a dicha forma normal:

$$\sim[\sim p.\sim(x)\sim(fx.gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(fx.\sim gx)].\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.gx)].$$
$$.\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(\sim fx.gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)]$$

La forma normal de '$(x)[gx.\sim(fx.p)]$' resulta ser

$$(x)\sim(fx.gx.p).(x)\sim(fx.\sim gx.p).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim p).$$
$$.(x)\sim(\sim fx.\sim gx.p).(x)\sim(\sim fx.\sim gx.\sim p).$$

(*) De Quine, Métodos, p. 265, apenas modificado.

Aplicando (V) a este esquema:

$\sim[p.\sim(x)\sim(fx.gx)].\sim[p.\sim(x)\sim(fx.\sim gx)].\sim[\sim p.(x)\sim(fx.\sim gx)]$
$.\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)]$

La forma normal de S es entonces:

$\sim\{\sim[\sim p.\sim(x)\sim(fx.gx)].\sim[p.\sim(x)\sim(fx.\sim gx)].\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.gx)].$
$.\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].\sim[\sim p.\sim(X)\sim(\sim fx.gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].$
$.\sim[p.\sim(x)\sim(fx.gx)].\sim[p.\sim(x)\sim(fx.\sim gx)].\sim[\sim p.(x)\sim(fx.\sim gx)].$
$.\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)]\}$ C

A, que en este caso es

$\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)]$,

c-implica a C, como tal vez se anime a comprobar el lector. S, por ello, es válido.

9. No es posible dar término a este capítulo sin dedicar unas palabras a la razón de ser del condicional '$\sim(A.\sim C)$', cuyo carácter es el que decide finalmente acerca de la validez de un esquema cuya forma normal es C.

A primera vista puede tenerse la impresión de que se trata de un añadido superfluo y que puede, por tanto, ser eliminado sin perjuicio alguno para la eficacia de QS, es decir, que el proceso puede terminar considerando a la forma normal C como una truth-function de cuantificativos típicos, cuya evaluación ha de permitir alcanzar la decisión sin tener por qué continuar con la del mencionado condicional. No sobra, sin embargo, tal fase de QS: si el esquema '$\sim[(x)fx.(x)\sim fx]$', por ejemplo, es sometido a QS, acortado de la manera antedicha, esto es, sin tomar en cuenta el condicional '$\sim(A.\sim C)$', se verá que no resulta válido, situación imposible de aceptar pues es en verdad imposible que, como enuncia el esquema, todos los objetos del Universo disfruten al mismo tiempo de las propiedades contradictorias f y -f, pero en cambio su validez resulta corroborada si se le somete a QS, comprendiendo la prueba del condicional. En lo que sigue se va a tratar de elucidar este punto y otros concomitantes.

Recuérdese, para empezar, que la corrección de los resultados de QS se halla garantizada a condición de que el universo no sea vacío (*). Pues bien: simbólica y operativamente dicha estipulación funciona en QS al figurar como el antecedente A del condicional para la decisión, y esto se muestra claramente cuando, al substituir sus U-cuantificadores por E-cuantificadores, A viene a ser

$$(\exists x)(\alpha_1 x . \alpha_2 x . \ldots . \alpha_n x) \vee (\exists x)(\alpha_1 x . \alpha_2 x . \ldots . \sim\alpha_n x) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (\exists x)(\sim\alpha_1 x . \sim\alpha_2 x . \ldots . \sim\alpha_n x),$$

esto es, un enunciado que afirma que existe por lo menos un objeto que disfruta de las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ o que existe por lo menos un objeto que disfruta de las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \sim\alpha_n$, y así sucesivamente, es decir, que existe por lo menos un individuo que disfruta de alguna de las posibles combinaciones de la totalidad de propiedades dadas en cierto universo y que éste, por tanto, no es vacío.

El esquema '$\sim[(x)fx.(x)\sim fx]$' equivale, intercambiando sus cuantificadores, a '$\sim[\sim(\exists x)\sim fx.\sim(\exists x)fx]$', cuya tabla es

$\sim[\sim(\exists x)\sim fx.\sim(\exists x)fx]$

V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F

(*) Véase la sección 3, supra.

Se aprecia cómo la línea que perjudica la validez es precisamente aquélla en que se consideran falsos '$(\exists x)fx$' y '$(\exists x)\sim fx$', lo que significa que, cuando no existe un objeto que disfrute de f ni de -f, esto es, cuando el universo del discurso para '$\sim[\sim(\exists x)\sim fx . \sim(\exists x)fx]$' sea vacío, el esquema no es válido. Pero si se admite la estipulación de un universo no vacío, la tabla es

$$\sim[(\exists x)\sim fx \vee (\exists x)fx . \{\sim(\exists x)\sim fx . \sim(\exists x)fx\}]$$

V V	V V	F F	FF
V V	V F	F F	FV
V F	V V	F V	FF
V F	F F	F V	VV

y de acuerdo a ella es válido el esquema según el cual <u>si</u> el universo no es vacío, por existir en él por lo menos un objeto que disfruta de f o de -f, '$\sim[\sim(\exists x)\sim fx . \sim(\exists x)fx]$' y su equivalente '$\sim[(x)fx . (x)\sim fx]$' son válidos, pues sean los que fueren los valores asignados a sus cuantificativos típicos, nunca se dará el caso de que sean falsos. Ahora bien: como el antecedente es su condición suficiente, y se afirma de antemano, con el carácter de estipulación forzosa, que es verdadero, por modus ponens se llega a la validez de '$\sim[(x)fx . (x)\sim fx]$'.

La estipulación de un universo no vacío, motivo esencial de la última fase de QS, no es innecesaria, pues si se intenta alcanzar resultados similares a los conseguidos por la Lógica tradicional no es posible prescindir de ella (*). De manera que si se adopta el condicional, tal como sucede en Sentido, QS per

---

(*) No debe confundirse tal estipulación con la "condición existencial", también requerida para la validez de algunas inferencias de la Lógica tradicional, o sea la concesión de que ciertos términos o clases que aparecen en tales inferencias poseen por lo menos un elemento. Esta es una suposición más fuerte que la del universo no vacío, como lo ilustra el hecho de que los modos Darapti, Felapton, Fesapo y Bamalip, por ejemplo, admitida la existencia de elementos pertenecientes a sus términos medio y mayor, son válidos siempre, pero sin tal admisión no lo son, sea o no vacío el universo del discurso.

mite decidir acerca de la validez de un esquema monádico en un universo no vacío (que es la que toma en cuenta la Lógica tradicional), y de no hacerlo así, la decisión aportada por QS es correcta sólo tratándose de un universo cualquiera, vacío o no (*).

Existe sin embargo un medio más práctico que quitar o poner el antecedente antes de efectuar la tabla de valores cuando se desee determinar la validez de un esquema en un universo vacío o no. Afirma Church, a propósito del procedimiento decisorio de Von Wright, basado en la misma idea de QS, que una fórmula predicativa monádica de primer grado, puesta en una forma normal que se obtiene luego de distribuir los E-cuantificadores sobre un operando en forma normal disyuntiva, es válida "in all non-empty domains of individuals if and only if it has the value Truth for every such system of truth-values in which not all the 2^n E-constituents ("cuantificativos típicos") have the value falsehood" (**), es decir, que poner como condición que el universo no sea vacío da lo mismo que borrar de la respectiva tabla de su forma normal, obtenida según los preceptos de QS, la línea en que se asigna V a todos los cuantificativos típicos que forman parte de ella (+).

De modo que el empleo de QS puede ser apreciablemente facilitado si se modifica su última parte de la manera siguiente: a) obtenida la forma normal C, debe efectuarse su tabla para todos los valores que puedan asumir sus cuantificativos; b) S es válido en un universo no vacío si y sólo si, suprimida la prime-

(*) La condición existencial, en caso de requerirse, debe ser formulada explícitamente en el primer caso. En el segundo es imposible formular la condición existencial sin admitir al mismo tiempo la no vacuidad del universo.
(**) Review, p. 59.
(+) Si se recuerdan conocidas equivalencias entre U- y E-cuantificadores no deberá sorprender esta aparente alteración del pasaje citado de Church.

ra línea de la tabla, esto es, aquella en que se asigna V a todos los cuantificativos, S es c-válido; c) S es válido en cualquier universo, vacío o no, si y sólo si, tomando en consideración todas las líneas de la tabla, S es c-válido (*).

Así, por ejemplo, en el caso del esquema tantas veces utilizado, la tabla es

~[	(x)fx.	(x)	~fx]
F	V	V	V
V	V	F	F
V	F	F	V
V	F	F	F

Suprimir la primera línea es aceptar la estipulación del universo no vacío, lo que originalmente se realizaba mediante el agregado del antecedente A. S es entonces válido, por ser c-válido según la tabla reducida. No lo es, en cambio, si se toma en cuenta la tabla íntegra, es decir, cuando el universo es vacío.

10. A manera de resumen de las consideraciones hechas hasta aquí sobre el procedimiento QS puede afirmarse lo siguiente:

a) La presencia de cuantificativos con operandos c-válidos en un esquema básico cualquiera perturba el juego de las reglas de QS, cuyo autor, o no se ha percatado de ello, o intencionadamente ha dejado a sus lectores la tarea de descubrir y resolver por su cuenta la cuestión. Sea como fuere, debe tenerse muy presente lo dicho en la sección II.6, supra, si es que no se desea correr el riesgo de obtener, al usar QS, resultados incorrectos.

(*) El tratamiento de esquemas que exhiben cuantificaciones con operandos c-válidos o c-inconsistentes (véase sección 6, supra) no varía en caso de admitirse esta modificación de QS.

b) El procedimiento QS no permite una decisión cuando en el esquema aparecen constantes individuales. Si bien el propio Quine conviene en esto al no tener como monádico un esquema de esa especie y al no proporcionar técnica alguna de reducción, y nadie puede discutir su derecho a hacerlo así, tampoco puede discutirse la frecuencia y utilidad de dichos esquemas, sobre todo para el análisis de inferencias en las que aparecen proposiciones singulares. Un procedimiento que sea aplicable a ellos será sin duda superior a QS.

c) El procedimiento QS es arduo y fatigoso, aún tratándose de esquemas monádicos relativamente simples, y así lo ha reconocido su autor (*), pero puede sin embargo simplificarse considerablemente según las indicaciones hechas en las secciones 6 y 9. El caso de esquemas en forma normal prenex y de esquemas complejos en general requiere para su solución un esfuerzo evidentemente desproporcionado en relación a otros procedimientos conocidos.

d) Lo aseverado en los tres incisos anteriores acerca de QS no lo hacen recomendable. El propio Quine no vuelve a mencionarlo en sus obras, como no sea para poner de manifiesto sus desventajas prácticas, comparándolo con otros que concibió posteriormente.

(*) Métodos, p. 170, n.1.

C A P I T U L O   III

El Procedimiento QL

1. Un año después de publicado O Sentido, Quine introdujo un nuevo procedimiento decisorio, "reminiscencia de procedimientos desarrollados por Behmann (1922) y Parry (1932)" (*), descrito en el artículo "On the Logic of Quantification" (**). "The primary purpose of this paper ...... is to present a new decision procedure for monadic schemata which seems convenient enough for practical and pedagogical use" (+).

En la sección 5 de dicho artículo el autor justifica el procedimiento que presenta y que a partir de aquí se mencionará abreviadamente con las letras QL. Dicha justificación no será incluída en este trabajo, ni tampoco la extensión de QL a esquemas poliádicos, esto es, esquemas en los cuales las letras predicativas poseen dos o más argumentos, puesto que, ni aquélla concierne a su objetivo, ni dicha extensión constituye propiamente un procedimiento decisorio en sentido estricto(++). En efecto, el que "all the valid polyadic schemata can be derived from the monadically valid schemata" (*+) no significa otra cosa que la posibilidad de obtener por substitución, a partir de un esquema monádico válido, esquemas poliádicos también válidos. Esto no constituye sino "medio procedimiento decisorio" (+*), puesto que no proporciona "procedimientos generales

---

(*) Métodos, p. 170, n.1.
(**) JSL, 10 (1945), p. 1-12. Llama verdaderamente la atención que Anderson y Johnstone (Natural Deduction, p. 339) confundan este nuevo procedimiento con el QS ya estudiado en el capítulo anterior.
(+) Logic, p. 3/4 .
(++) "It is known, furthermore, that no decision procedure is possible for the validity of polyadic schemata" (ibid., p. 4).
(*+) Loc. cit.
(+*) Métodos, p. 260.

para mostrar la no validez" (*) de los esquemas poliádicos que sean de tal condición.

El procedimiento QL se halla constituído esencialmente por una prueba de validez, aplicable únicamente a esquemas monádicos básicos cerrados (**). Es posible, sin embargo, extenderla a toda clase de esquemas monádicos, lo que se logra agregando a dicha prueba una técnica que permite transformar cualquier esquema monádico cerrado en otro equivalente, pero básico (+). QL se compone, por tanto, de una técnica de reducción a esquemas monádicos básicos cerrados, más una prueba de validez, descritas ambas en las secciones 3 y 4 de "On the Logic

---

(*) Loc. cit.

(**) Como en este artículo Quine cambia substancialmente la terminología empleada en Sentido, es conveniente hacer algunas indicaciones al respecto. Un esquema monádico se denomina "cerrado" si carece de variables libres y recibe el nombre de "cierre" ("closure") de otro esquema S que posee variables libres, siempre que se halle compuesto por este último, más cuantificadores universales 'x', 'y', etc., correspondientes a cada una de las variables libres que S exhibe. Un esquema que ostente por lo menos una variable libre está "abierto". Una cuantificación "básica", por otro lado, es un esquema cerrado que consiste en un cuantificador universal, seguido por una truth-function, cada uno de cuyos componentes es una letra predicativa seguida por la variable que aparece en el cuantificador. Se denomina, por último, "esquema básico", una truth-function en la que alguna o todas sus letras proposicionales se hallan substituídas por cuantificaciones básicas. Así, por ejemplo, son básicos los esquemas '$(x)fx \supset p.(\exists x)fx. \supset .p$' y '$(x)(fx \supset gx).(x)(gx \supset hx). \supset .(x)(fx \supset hx)$'. Pero '$(x)(fx \supset p). .(\exists x)fx. \supset .p$' no lo es, puesto que '$(x)(fx \supset p)$', una de las cuantificaciones que aparece en lugar de una letra proposicional, no es básica.

(+) Como en el caso de QS (véase II.6 supra), un esquema monádico que exhiba una fórmula elemental compuesta de una letra predicativa seguida por una constante individual ni es básico, de acuerdo a "Logic", ni hay cómo transformarlo en básico con los medios que proporciona la técnica aludida en el texto. Por lo tanto, la determinación de su validez o de su invalidez no puede ser sometida a QL, so pena de incurrir en graves errores. El esquema '$(x)fx \supset fa$' ilustra tal situación, pues siendo obviamente válido resulta no serlo cuando se le somete a la prueba de validez de QL.

of Quantification". "The combined techniques of the two sections" - afirma el autor - "then enable us to test any monadic schema for validity, simply by transforming its closure into a basic equivalent and testing the latter for validity" (*).

Quine empieza explicando primero la técnica de reducción y en lo que sigue se hará lo mismo.

2. No existe forma de pasar de un esquema monádico cerrado no básico S a otro básico equivalente que no sea la de "depurar" sus cuantificaciones, expulsando de los respectivos operandos las fórmulas que no deben aparecer en ellos. Dichas fórmulas pueden ser: a) letras proposicionales como 'p', 'q' , etc.; b) fórmulas elementales cuya variable no es la de cuantificación, como 'fy' en '(x)(fy ⊃ gx)'; o c) cuantificaciones básicas, con variables distintas a la de cuantificación, como '(∃y)gy' en '(x)[fx ⊃ (∃y)gy]' (**).

El método general de expulsión ("exportation") de las fórmulas enumeradas propuesto por Quine a manera de complemento de QL prescribe las siguientes operaciones, que se aplicarán, como es natural, únicamente cuando el caso lo requiera:

a) Toda ocurrencia de '(∃x)', '(∃y)', etc. debe ser substituída por '∼(x)∼', '∼(y)∼', etc., respectivamente, de manera tal que en S aparezcan sólo cuantificaciones universales, negadas o no.

b) Sea '(x)(.............)' una cuantificación de S que exhibe un componente 'p' no permitido en las cuantificaciones

---

(*) Logic, p. 4.
(**) No hay necesidad de incluir en esta lista componentes del tipo 'fa', desde que, como se indicó en la sección anterior, su presencia, incluso fuera de los operandos, impedirá siempre que S, según lo prescrito por QL, sea o pueda transformarse en básico.

básicas (*). Para expulsar dicho componente se empezará por encontrar, "by truth-function theory" (Logic, p. 4), las dos expresiones a que se reduce '(........)' para 'p'='⊤' y 'p'='⊥'. "An easy graphic way (**) is to put the appropiate truth-value letter, 'T' or 'F' for 'p' throughout '(........)' and then progressively reduce '∼⊤' to '⊥', '∼⊥' to '⊤', '⊤.fx' to 'fx', '⊥.fx' to '⊥', 'fx ⊃ ⊥' to 'fx', and so on" (loc.cit.), hasta lograr que '⊤' y '⊥' desaparezcan de '(........)'.

Sean '(--------)' y (°°°°°°°°)' las dos expresiones buscadas. La cuantificación original '(x)(........)' equivale a

$$p.(x)(\text{--------}).\vee .\sim p.(x)(\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ) \ (+) \quad . \qquad D$$

'D' es la forma general de la cuantificación básica, equivalente a la no básica, que se buscaba.

Sea, por ejemplo, la cuantificación no básica siguiente:

$$(x)(fx \supset p) \qquad (1)$$

Se trata de expulsar 'p' para depurar el operando y transformar (1) en una cuantificación básica. Aplicando a 'fx ⊃ ⊤' y 'fx ⊃ ⊥' el método explicado, se obtiene, respectivamente, '⊤' y '∼fx'. D es entonces, para este caso,

$$p.\top.\vee .\sim p.(x)\sim fx \quad . \qquad (2)$$

(*) Se usa, por razones de comodidad, la letra 'p', pero es obvio que puede tratarse de cualquier otro de los componentes "vetados", lo que en nada altera el procedimiento reductivo.
(**) Este "easy graphic way", salvo el hecho de usar '⊥' en vez de '⊥', es la misma técnica resolutiva que va a aparecer expuesta in extenso, sólo cinco años más tarde, en Methods of Logic (New York, 1950). Véase Métodos, § 5, donde figura la descripción pormenorizada de esta técnica.
(+) No siempre (--------) y/o (°°°°°°°°) son esquemas: unas veces resultarán '⊤' y otras '⊥'. En tales casos '(x)(⊤)' y/o '(x)(⊥)', como se infiere de los ejemplos del texto original, serán substituídas por '⊤' y/o '⊥', respectivamente.

Pero 'p.⊤' equivale a 'p'. (2), por lo tanto, equivale a

$$p. \vee .\sim p.(x)\sim fx \quad , \qquad (3)$$

que puede simplificarse aún más apelando a la distributividad de '∨'. Se obtiene así, primero,

$$p \vee \sim p . p \vee (x)\sim fx \quad ,$$

y luego

$$p \vee (x)\sim fx \quad ,$$

que es la cuantificación buscada.

c) La disyunción inicial D, como lo ilustra el ejemplo anterior, es susceptible de simplificación cuando las expresiones '(--------)' y/o '(°°°°°°°°)' resultan ser sencillamente 'V' o 'F'. Quine proporciona una lista de las formas generales simplificadas a las que se llega en estos casos, pero no es preciso siquiera conocerlas - como parecería exigir el texto del artículo - pues basta saber operar con truth-functions para alcanzar la respectiva forma simplificada. Los ejemplos que siguen son lo suficientemente esclarecedores al respecto y no requieren mayor explicación.

I) $p.(x)(\text{--------}). \vee .\sim p.\top$ D

$p.(x)(\text{--------}). \vee .\sim p$

$p \vee \sim p . \sim p \vee (x)(\text{--------})$

$\sim p \vee (x)(\text{--------})$

$p \supset (x)(\text{--------})$

II) $p.F . \vee .\sim p.(x)(\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ)$ D

$F . \vee .\sim p.(x)(\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ)$

$\sim p.(x)(\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ)$

III) $p.F \ .\vee . \sim p.T$ D

$F \ .\vee . \sim p$

$\sim p$

IV) $p.T. \vee . \sim p.T$ D

$p. \vee . \sim p$

o $p \supset p$ (*)

V) $p.F \ .\vee . \sim p.F$ D

$F \vee F$

F (*)

$p. \sim p$

d) "Now the method of transforming any closed monadic schema into a basic equivalent consists merely in continued use of the above exportation technique starting in the innermost quantifications of [S]". (ibid., p. 5)

Como de costumbre, un ejemplo aclarará la idea. Sea el esquema no básico

$$(y)(x)(fx.fy. \supset .gx \vee p) \qquad (1)$$

Debe empezarse expulsando 'fy' de la cuantificación '(x)(...)' que es la "más interna" (**). La expulsión de 'fy' se logra así:

$fx.T. \supset .gx \vee p$ $\qquad$ $fx.F. \supset .gx \vee p$

$fx. \supset .gx \vee p$ $\qquad$ $F. \supset .gx \vee p$

T

(*) Cuando un esquema S queda reducido a 'F' o a la tautología trivial '$(p \vee \sim p)$', la ulterior prueba de validez es indudablemente superflua, pues ha quedado establecido que S es c-inconsistente o c-válido, respectivamente. Pero nada se lee en Logic acerca de esto.
(**) Es indiferente empezar por 'fx' o 'p', si bien la secuela habrá de ser distinta según el punto de partida que se elija.

$$fy.(x)(fx. \supset .gx \vee p).\vee.\sim fy.T \qquad D$$
$$fy.(x)(fx. \supset .gx \vee p).\vee.\sim fy$$
$$\sim fy \vee fy.\sim fy \vee (x)(fx. \supset .gx \vee p)$$
$$\sim fy \vee (x)(fx. \supset .gx \vee p)$$
$$fy \supset (x)(fx. \supset .gx \vee p)$$

(1) queda transformado en

$$(y)[fy. \supset .(x)(fx. \supset .gx \vee p)] \qquad (2)$$

Substitúyase ahora '(x)(fx. ⊃ .gx∨p)' por la variable auxiliar 'X', a fin de no embrollar innecesariamente las operaciones, y expúlsese 'X' de la cuantificación '(y)(........)' de acuerdo a las reglas conocidas.

$$(y)(fy. \supset .X)$$

$$fy \supset T \qquad\qquad fy \supset F$$
$$T \qquad\qquad \sim fy$$

$$X.T.\vee\sim X.(y)\sim fy \qquad D$$
$$X.\vee .\sim X.(y)\sim fy$$
$$X \vee \sim X.X \vee (y)\sim fy$$
$$X \vee (y)\sim fy$$

o sea:

$$(x)(fx. \supset .gx \vee p) \vee (y)\sim fy \qquad (3)$$

No resta ahora otra cosa que expulsar 'p' de '(x)(fx. ⊃ .gx ∨ p)'.

$$fx. \supset .gx \vee T \qquad\qquad fx. \supset .gx \vee F$$
$$fx. \supset .T \qquad\qquad fx. \supset .gx$$
$$T$$

$$p.T.\vee .\sim p.(x)(fx \supset gx)$$
$$p.\vee .\sim p.(x)(fx \supset gx)$$
$$p \vee \sim p.p \vee (x)(fx \supset gx)$$
$$p \vee (x)(fx \supset gx) \qquad (4)$$

(1) queda así transformado en el esquema básico

$$p \vee (x)(fx \supset gx) \vee (y)\sim fy \quad . \qquad (5)$$

e) Debe advertirse que antes de someter el esquema básico resultante al procedimiento decisorio propiamente dicho, "all their variables are to be written uniformely as 'x'" (ibid., p. 6). (5) se escribirá entonces

$$p \vee (x)(fx \supset gx) \vee (x)\sim fx. \qquad (6)$$

"Such relettering will never engender conflict, since in a basic schema all occurrences of variables are bound to quantifiers with non-overlapping scopes" (loc. cit.).

3. La segunda fase del procedimiento QL, esto es, la que permite establecer algorítmicamente la validez (o invalidez) de un esquema monádico cualquiera S, consiste fundamentalmente en la combinación de ciertas "familiar techniques of truth-function theory" (*). Estas técnicas deben aplicarse siguiendo un orden fijo, de acuerdo a las siguientes instrucciones:

1. Se construye una tabla de valores para S, considerando todas las combinaciones de valores V y F que pueden asignarse a las cuantificaciones básicas sin negar y a las letras proposicionales que exhibe S.

2. Si, luego de esto, S resulta ser c-válido (o "medádicamente válido", de acuerdo a este artículo), "the test is already at an end" (loc. cit.): S es válido.

3. Si S no es c-válido, bórrense o suprímanse las líneas o arreglos que arrojen V y determínese si cada una de las líneas o arreglos restantes se halla por lo menos en uno de estos tres casos:

a) Asigna 'F' a una cuantificación básica cuyo operando es c-válido.

(*) Logic, p. 6 .

b) Asigna 'V' a una cuantificación básica cuyo operando es c-inconsistente o a varias cuantificaciones básicas, la conjunción de cuyos operandos es c-inconsistente.(*)

c) Asigna 'V' a una o más cuantificaciones básicas cuyo operando, o la conjunción de cuyos operandos, implica al operando de otra a la que se asigna 'F'. (**)

S es inválido si y sólo si una de las líneas o arreglos que resultaron falsos no cumple por lo menos una de las condiciones (a)-(c). O, en otras palabras, S es válido si y sólo si todos los arreglos mencionados cumplen por lo menos una de esos tres requisitos.(+).

4. Algunos pasajes de las instrucciones puntualizadas en la sección anterior no son lo suficientemente claros e inequívocos, y como pueden provocar, a juicio del autor de esta tesis, ciertas discrepancias acerca de la exacta manera de aplicar QL, a continuación se va a tratar de esclarecer su sentido correcto y de enmendarlos donde sea preciso, para evitar que una desprevenida interpretación suponga imprescindible la ejecución de una serie de operaciones o verificaciones que son en realidad superfluas.

(*) "It assigns 'T' to one or more quantifications whose scope, or the conjunction of whose scopes, is medadically contravalid". (loc. cit.)

(**) "The scope, or conjunction of scopes, of one or more quantifications assigned 'T' medadically implies the scope of a quantification assigned 'F'." (loc. cit.)

(+) Las letras proposicionales que exhibe S no tienen otro papel que el de intervenir en la eliminación de arreglos. Los dos requisitos estipulados en 3a y 3b no rezan con ellas y en lo que concierne al cumplimiento de 3c es condición suficiente y necesaria el análisis de condicionales compuestos exclusivamente por operandos.

a) Quien trate de determinar si es o no válido el esquema

$$(x)\sim(fx \supset gx) \vee (x)(fx \vee \sim hx) . (x)\sim(gx . hx) \supset \sim(x)(fx \vee \sim hx) . \sim(x)\sim(fx \supset gx) . (x)\sim(gx . hx)$$

verá, una vez efectuada la tabla, que es c-inconsistente, es decir, que los ocho arreglos posibles son falsos. De acuerdo a la regla 3 de la prueba de validez de QL, como no es c-válido, podría creerse que es necesario proseguir aún, verificando si cada uno de los ocho cumple o no los requisitos estipulados por ella. Pero no hay razón para continuar, pues es fácil probar que cuando un esquema básico, una vez efectuada su evaluación tabular, es c-inconsistente, la prueba, como en el caso de los esquemas c-válidos, también "is already at an end", debiéndose afirmar, sin más, que dicho esquema no es ni puede ser cuantificacionalmente válido. Este agregado, que perfecciona QL (*) y al mismo tiempo simplifica, para tales casos, su operación, se demuestra de la manera siguiente:

Denomínense t-cuantificaciones a todas aquellas que por contar con un operando c-válido son también cuantificacionalmente válidas o, simplemente, válidas. Sea S un esquema básico c-inconsistente cualquiera. S, que es falso en todas sus arreglos, o exhibe t-cuantificaciones o no las exhibe.

a) S carece de t-cuantificaciones. Es imposible entonces que S pueda cumplir alguna de las tres condiciones es-

---

(*) Si, de otro modo, para efectos de la aplicación de QL, los esquemas c-inconsistentes son asimilados a los c-consistentes, como de modo tácito admite el texto original, un lector desatento podría figurarse inadvertidamente que un esquema c-inconsistente puede cumplir los requisitos obligados y, en consecuencia, ser cuantificacionalmente válido. Lo que, como se va a demostrar, es imposible.

tipuladas en la línea o arreglo FFFFF...., como lo evidencia la simple lectura de las reglas.

b) S posee t-cuantificaciones. Puede suceder: 1) que lo sean una o varias, pero no todas; o 2) que lo sean todas.

1) En el arreglo donde sólo la ó las t-cuantificaciones de S tengan asignadas V y las demás F es imposible que S cumpla alguna de las tres exigencias por lo siguiente:

i) Ninguna t-cuantificación tiene asignada F, por hipótesis.

ii) Ni individualmente ni unidos por conjunción pueden los operandos de las únicas cuantificaciones V-asignadas (*) ser inconsistentes, por hipótesis.

iii) El operando de la única cuantificación V-asignada (si sólo hay una) no puede implicar a ninguno de los de las cuantificaciones F-asignadas por cuanto, por hipótesis, aquél es c-válido, mientras que ninguno de éstos lo es. Cuando haya más de una t-cuantificación, tampoco podrá la conjunción de sus operandos, que será c-válida, por hipótesis, implicar a cada uno de los operandos de las cuantificaciones F-asignadas que, por hipótesis también, no son c-válidos.

2) Cuando todas las cuantificaciones de S son t-cuantificaciones, basta que todas sean V-asignadas en un arreglo para que sea imposible, como es evidente, que S cumpla en dicho arreglo con alguna de las tres condiciones requeridas para su validez.

(*) Es decir, aquéllas que tienen asignada una V en un determinado arreglo.

De esta manera se ha probado que, en todos los casos posibles, un esquema c-inconsistente S no puede cumplir, por lo menos en uno de sus arreglos, alguno siquiera de los tres requisitos exigidos. Por lo tanto queda demostrado que en ningún caso un esquema c-inconsistente, sometido a QL, puede ser válido.

b) Sea A un arreglo falso de la tabla de valores de un esquema básico cualquiera, $P_i (1 \leq i \leq n)$ cada uno de los operandos de las cuantificaciones V-asignadas en A y n el número de estas cuantificaciones. De acuerdo al texto de la regla 3, inc. b, proceder a la verificación allí exigida puede significar dos cosas diversas: o es preciso comprobar que P_1, P_2, ..., P_n, $P_1 . P_2$, $P_1 . P_3$, ..., $P_1 . P_n$, $P_2 . P_3$, $P_2 . P_4$, ..., $P_2 . P_n$, ..., $P_1 . P_2 ...... P_n$ (esto es, $2^n - 1$ conjunciones posibles de P_i (*)) son o no c-inconsistentes, o basta inspeccionar $P_1 . P_2 ...... P_n$ (o únicamente P_1 cuando n = 1) con idéntico propósito. La elección entre una y otra alternativa es ciertamente importante si se toma en cuenta la diferencia de trabajo reclamado y la mayor o menor simplicidad que pueda alcanzarse.

No hay duda sin embargo que el segundo camino es el mejor. Obsérvese, en efecto, que si la conjunción $P_1 . P_2 .... P_n$ (o P_1 si n = 1) es c-inconsistente, no es necesario averiguar más: el arreglo cumple lo exigido por 3b; y si no lo es, su tabla ha de exhibir por lo menos un arreglo donde se asigna V a cada uno de los P_i, en cuyo caso cualquier conjunción de P_i tiene un arreglo V y tampoco puede ser c-inconsistente. Por lo tanto el examen de $P_1 . P_2 .... P_n$ es condición suficiente y necesaria para comprobar el cumplimiento de lo prescrito en el inciso aludido.

(*) Entre las que hay que contar, por extensión, cada uno de los P_i.

c) A, P_i ($1 \leq i \leq n$) y n poseen el mismo significado que en el inciso anterior. Se trata ahora de determinar si A cumple o no el requisito contenido en la regla 3, inc. c. Se tiene la impresión, tal como está redactado dicho inciso, que es imprescindible examinar todos los condicionales que tienen por antecedente un P_i o una conjunción cualquiera de P_i y por consecuente el operando Z de una cuantificación F-asignada. Si un arreglo entonces exhibe n cuantificaciones V-asignadas y r F-asignadas, parecería haber necesidad de efectuar sendas evaluaciones tabulares de $r(2^n-1)$ condicionales diferentes para comprobar si el mencionado requisito se cumple o no.

Pero no es así, por suerte para quien se vea en la necesidad de emplear QL. En efecto: si hay una sola cuantificación V-asignada, sólo se examinará el condicional $P \supset Z$, y si hay más de una, se requiere únicamente construir y evaluar el condicional $P_1 . P_2 .... P_n . \supset . Z$, puesto que, o es c-válido, con lo que el requisito queda cumplido, o no lo es, y entonces su tabla ha de exhibir por lo menos un arreglo donde se asigna F a Z y V a cada uno de los P_i, en cuyo caso, para cualquiera conjunción KP_i de P_i, en la tabla del condicional $KP_i \supset Z$ deberá aparecer siempre un arreglo falso. Por lo tanto, si $P_1 . P_2 .... P_n$ no c-implica a Z, tampoco podrá c-implicarlo ninguna otra conjunción formada por alguna combinación de P_i.

Se ha demostrado así que, para cada cuantificación F-asignada de un esquema básico cualquiera, el examen del condicional $P_1 . P_2 .... P_n . \supset . Z$ (ó $P \supset Z$ si $n = 1$) es condición suficiente y necesaria para determinar si A cumple o no con el requisito 3c.

De acuerdo a los resultados obtenidos en los tres incisos precedentes resulta inevitable reformar y completar las reglas 2 y 3 de la prueba de validez de QL, las mismas que bien pueden quedar redactadas en la siguiente forma:

2) Si luego de confeccionar la tabla a que se refiere la regla anterior se aprecia que S es c-válido, la prueba ha concluído y S es válido. Si S es c-inconsistente, también ha concluído la prueba y S no es válido.

3) Si S ni es c-válido ni c-inconsistente, bórrense o suprímanse las líneas o arreglos que arrojen una V final. Para que S sea válido cada uno de los arreglos restantes debe cumplir por lo menos una de estas tres condiciones:

a) El operando de una cuantificación básica F-asignada es c-válido.

b) La conjunción de los operandos de todas las cuantificaciones básicas V-asignadas (o el operando de la única, si sólo hay una) es c-inconsistente.

c) La conjunción de los operandos de todas las cuantificaciones básicas V-asignadas (o el operando de la única, si sólo hay una) c-implica al operando de una cuantificación F-asignada en el mismo arreglo.

5. Los ejemplos que siguen ilustran la aplicación de QL a esquemas monádicos. Los números (1), (2) y (3) que se utilizan en ellos se refieren a la aplicación de las reglas respectivas (modificadas). Cuando es posible y la claridad no sufre mella, se abrevia la tabla de valores a que refiere la regla (1).(Véase al respecto III.7, inc.f,infra)

I) $(\exists x)(fx \vee gx) . \equiv . (\exists x)fx \vee (\exists x)gx$ S

Reemplazando cuantificadores:

$$\sim(x)\sim(fx \vee gx) . \equiv . \sim(x)\sim fx \vee \sim(x)\sim gx$$

(1) $\sim(x)\sim(fx \vee gx) . \equiv . \sim(x)\sim fx \vee \sim(x)\sim gx$

F	V	V	F	V	F	F	V	
F	V	F	F	V	V	V	F	(i)
F	V	F	V	F	V	F	V	(ii)
F	V	F	V	F	V	V	F	(iii)
V	F	F	F	V	F	F	V	(iv)
V	F	V	F	V	V	V	F	
V	F	V	V	F	V	F	V	
V	F	V	V	F	V	V	F	

(2) Como S no es c-válido, debe continuarse con (3).

(3) Tomando en cuenta sólo los arreglos que han resultado falsos, y que se numeran i, ii, iii y iv, se llega a las siguientes comprobaciones:

i) Cumple la condición (c), pues '$\sim(fx \vee gx)$', que tiene asignado V, implica a 'gx', que tiene asignado F.

ii) Cumple la condición (c), pues '$\sim(fx \vee gx)$', que tiene asignado V, implica a '$\sim fx$', que tiene F.

iii) Cumple también la condición (c), por darse las dos implicaciones consideradas ya en (i) y (ii).

iv) Cumple igualmente la condición (c), pues la conjunción de '$\sim fx$' y '$\sim gx$', que tienen ambos asignado V, implican a '$\sim(fx \vee gx)$', al que le corresponde F.

Como todas las líneas pertinentes cumplen alguna de las tres condiciones, S es válido.

II) $(x)(fx \supset gx) . (\exists x)(hx . fx) . \supset . (\exists x)(hx . gx)$ S

Unificando cuantificadores:

$(x)(fx \supset gx) . \sim(x)\sim(hx . fx) . \supset . \sim(x)\sim(hx . gx)$ S'

(1) No cabe sino un arreglo falso:

$$(x)(fx \supset gx).\sim(x)\sim(hx.fx).\supset.\sim(x)\sim(hx.gx)$$

V   V F   F V

(3) Es patente que el único arreglo no cumple ninguno de los dos primeros requisitos, pero cumple el tercero, pues el condicional

$$fx \supset gx.\sim(hx.gx).\supset.\sim(hx.fx) \quad (*)$$

es c-válido, como se verifica fácilmente. S, esquema del archiconocido modo Darii, es válido.

III) $(\exists x)fx.(\exists x)gx.\supset.(x)(fx \supset \sim gx) \supset (\exists x)(gx.\sim fx)$.   S

Unificando cuantificadores:

$\sim(x)\sim fx.\sim(x)\sim gx.\supset.(x)(fx \supset \sim gx) \supset \sim(x)\sim(gx.\sim fx)$ S'

(1) No existe sino un arreglo falso:

$$\sim(x)\sim fx.\sim(x)\sim gx.\supset.(x)(fx \supset \sim gx) \supset \sim(x)\sim(gx.\sim fx)$$

V F   V F   V   F V

(3) Este arreglo no cumple el primer requisito, ni tampoco el segundo, pues '$(fx \supset \sim gx).\sim(gx.\sim fx)$' no es c-inconsistente. Para saber si cumple o no el tercer requisito debe establecerse si alguno de los siguientes condicionales es o no c-válido (**):

i) $fx \supset \sim gx.\sim(gx.\sim fx).\supset.\sim fx$

ii) $fx \supset \sim gx.\sim(gx.\sim fx).\supset.\sim gx$

El segundo lo es, de manera que dos operandos de cuantificaciones básicas V-asignadas implican al de otra

---

(*) Repárese en la configuración de este condicional, tan diferente de la de S' (sin cuantificadores).

(**) De acuerdo a las reglas originales de QL habría necesidad, al parecer, de examinar cuatro condicionales más, fuera de los dos que se indican: $fx \supset \sim gx.\supset.\sim fx$; $fx \supset \sim gx.\supset.\sim gx$; $\sim(gx.\sim fx) \supset \sim fx$; y $\sim(gx.\sim fx) \supset \sim gx$.

F-asignada y así se satisface el tercer requisito. S es válido.

IV) $[p . \supset . q . (x)(fx \supset \sim gx)] . [q \supset (\exists x)(fx . gx \vee hx)]$
$. \supset . [p \supset (\exists x)(hx . \sim gx)]$ (*) S

Unificando los cuantificadores:

$[p . \supset . q . (x)(fx \supset \sim gx)] . [q \supset \sim (x) \sim (fx . gx \vee hx)]$
$. \supset . [p \supset \sim (x) \sim (hx . \sim gx)]$

(1) $[p . \supset . q . (x)(fx \supset \sim gx)] . [q \supset \sim (x) \sim (fx . gx \vee hx)]$
$. \supset . [p \supset \sim (x) \sim (hx . \sim gx)]$ (**)

V	V	VV	V	F	V	FF	V	V	V	FF	V
V	V	VV	V	F	V	FF	V	V	V	VV	F
V	V	VV	V	V	V	VV	F	F	V	FF	V
V	V	VV	V	V	V	VV	F	V	V	VV	F
V	F	VF	F		V	F	V		V	F	V
V	F	VF	F		V	F	V		V	V	F
V	F	VF	F		V	V	F		V	F	V
V	F	VF	F		V	V	F		V	V	F
V	F	FF	V		F	F	V		V	F	V
V	F	FF	V		F	F	V		V	V	F
V	F	FF	V		F	V	F		V	F	V
V	F	FF	V		F	V	F		V	V	F
V	F	FF	F		F	F	V		V	F	V
V	F	FF	F		F	F	V		V	V	F
V	F	FF	F		F	V	F		V	F	V
V	F	FF	F		F	V	F		V	V	F

(*) De Quine, Métodos, p. 171.
(**) No es necesario efectuar sino los dieciseis primeros arreglos, pues en los dieciseis restantes 'p' tiene asignado 'F', de manera que el consecuente será siempre V y el arreglo también V. Asimismo, como el primer componente del antecedente es F en los doce últimos arreglos de la mitad superior de la tabla, el antecedente será siempre F en ellos, que habrán de ser entonces necesariamente V. Quedan por resolver totalmente sólo los cuatro primeros arreglos de la tabla.

(3) Analizando el único arreglo que resulta falso, se aprecia que no cumple ni el primero ni el segundo requisito. Para que cumpla el tercero es preciso que sea c-válido el siguiente condicional:

$$(fx \supset \sim gx) . \sim(hx . \sim gx) . \supset . \sim(fx . gx \vee hx).$$

Como en efecto lo es, S es válido.

6. Los ejemplos resueltos a continuación sirven para aclarar la aplicación <u>completa</u> de QL, es decir, tanto la técnica depurativa como la prueba de validez. Ningún esquema de los sometidos aquí a QL es, naturalmente, básico.

I) $(y)[\sim fy \vee (\exists x)fx]$ S

$(y)[\sim fy \vee \sim(x)\sim fx]$ S'

Depurando S' :

$$\sim fy \vee T \qquad\qquad \sim fy \vee F$$
$$T \qquad\qquad \sim fy$$

$$\sim(x)\sim fx . T . \vee . (x)\sim fx . (y)\sim fy$$
$$\sim(x)\sim fx . \vee . (x)\sim fx . (y)\sim fy$$
$$\sim(x)\sim fx \vee (y)\sim fy$$
$$\sim(x)\sim fx \vee (x)\sim fx$$

Aplicando la prueba de validez:

(1) $\sim(x)\sim fx \vee (x)\sim fx$

F	V	V	V
V	F	V	F

(2) El esquema ha resultado ser c-válido. Por lo tanto S es válido.

II) $(x)(fx.p) . \supset . (\exists x)(gx . \supset . fx.p)$ (*) S

$(x)(fx.p) . \supset . \sim(x)\sim(gx . \supset . fx.p)$ S'

(*) De Quine, Métodos, p. 265, apenas modificado.

Depurando primero el antecedente y luego el consecuente de S' :

a)

$$fx . \mathrm{T} \qquad fx . \mathrm{F}$$
$$fx \qquad \mathrm{F}$$
$$p . (x)fx . \vee . \sim p . \mathrm{F}$$
$$p . (x)fx$$

b)

$$\sim(gx . \supset . fx . \mathrm{T}) \qquad \sim(gx . \supset . fx . \mathrm{F})$$
$$\sim(gx \supset fx) \qquad \sim(gx \supset \mathrm{F})$$
$$\sim \sim gx$$
$$gx$$
$$p . (x) \sim (gx \supset fx) . \vee . \sim p . (x)gx$$

El esquema básico equivalente a S' es

$$p . (x)fx . \supset . \sim[p . (x) \sim (gx \supset fx) . \vee . \sim p . (x)gx] \quad . \qquad \mathrm{A}$$

Simplificando A:

$$p . (x)fx . \supset . \sim p \vee \sim(x)(gx . \sim fx) . p \vee \sim(x)gx$$

Aplicando la prueba de validez:

(1) $p . (x)fx . \supset . \sim p \vee \sim(x)(gx . \sim fx) . p \vee \sim(x)gx$

VV	V	F	F	F	F	V	FVV	F	V
VV	V	F	F	F	F	V	FVV	V	F
VV	V	V	F	V	V	F	VVV	F	V
VV	V	V	F	V	V	F	VVV	V	F

No hace falta proseguir con la tabla, pues los coce arreglos restantes, por ser en ellos falso el antecedente, serán todos verdaderos.

(3) En los dos únicos arreglos que han resultado F, se ha asignado V a '(x)fx' y a '(x)(gx.∼fx)'. Como la conjunción de sus operandcs es inconsistente, queda cumplida, por ambos, el requisito (b), y S tiene que ser válido.

III) $$(x)[fx.gy. \supset .(y)(fy.gy)] \qquad S$$

Extrayendo 'gy' :

$$fx.T. \supset .p \qquad\qquad fx.F. \supset .p$$
$$fx \supset p \qquad\qquad T$$
$$gy.(x)[fx.(y)(fy.gy)]. \vee .\sim gy.T$$
$$\sim gy \vee (x)[fx.(y)(fy.gy)]$$

Depurando el segundo miembro de la disyunción:

$$\underset{T}{fx \supset T} \qquad\qquad \underset{\sim fx}{fx \supset F}$$
$$(y)(fy.gy).T. \vee .\sim(y)(fy.gy).(x)\sim fx$$
$$(x)\sim fx \vee (y)(fy.gy)$$

De manera que S se reduce al esquema

$$\sim gy \vee (x)\sim fx \vee (y)(fy.gy) \quad . \qquad S'$$

Pero S' no es todavía un esquema básico, pues exhibe una variable libre. Para cerrarlo es preciso escribir '$\sim gz$' en vez de '$\sim gy$' y cuantificar universalmente todo S' respecto a 'z', formándose así el esquema

$$(z)[\sim gz \vee (x)\sim fx \vee (y)(fy.gy)]$$

que se depura así:

$$\sim gz \vee T \qquad\qquad\qquad \sim gz \vee F$$
$$T \qquad\qquad\qquad \sim gz$$
$$(x)\sim fx \vee (y)(fy.gy).T. \vee \sim[(x)\sim fx \vee (y)(fy.gy)].(z)\sim gz$$
$$(z)\sim gz \vee (x)\sim fx \vee (y)(fy.gy)$$
$$(x)\sim gx \vee (x)\sim fx \vee (x)(fx.gx) \qquad A$$

A tiene un sólo arreglo falso: cuando todas las cuantificaciones básicas tienen asignada una F. Y en tal arreglo es imposible cumplir alguna siquiera de las tres condiciones estipuladas: S no es válido.

IV) $$(\exists x)(y)(fx \equiv fy) \qquad S$$

$$\sim(x)\sim(y)(fx \equiv fy) \qquad S'$$

Depurando '(y)(fx $\equiv$ fy)' : (*)

$$\begin{array}{ccc} \top \equiv fy & & F \equiv fy \\ \top \supset fy . fy \supset \top & & F \supset fy . fy \supset F \\ fy . \top & & \top . \sim fy \\ fy & & \sim fy \end{array}$$

$$fx . (y)fy . \vee . \sim fx . (y)\sim fy$$

S' queda transformado en

$$\sim(x)\sim[fx . (y)fy . \vee . \sim fx . (y)\sim fy] .$$

Extrayendo '(y)fy' :

$$\begin{array}{ll} \sim[fx . \top . \vee . \sim fx . (y)\sim fy] & \sim[fx . F . \vee . \sim fx . (y)\sim fy] \\ \sim[fx . \vee . \sim fx . (y)\sim fy] & \sim[\sim fx . (y)\sim fy] \\ \sim[fx . \vee . (y)\sim fy] & \end{array}$$

$$\sim[(y)fy . (x)\sim\{fx . \vee . (y)\sim fy\} . \vee . \sim(y)fy . (x)\sim\{\sim fx . (y)\sim fy\}] \quad S''$$

Depurando '(x)$\sim$[fx $\vee$ (y)$\sim$fy]' :

$$\begin{array}{cc} \sim(fx \vee \top) & \sim(fx \vee F) \\ F & \sim fx \end{array}$$

$$(y)\sim fy . F . \vee . \sim(y)\sim fy . (x)\sim fx$$

$$\sim(y)\sim fy . (x)\sim fx$$

Depurando '(x)$\sim$[$\sim$fx . (y)$\sim$fy]' :

$$\begin{array}{cc} \sim(\sim fx . \top) & \sim(\sim fx . F) \\ fx & \top \end{array}$$

$$(y)\sim fy . (x)fx . \vee . \sim(y)\sim fy . \top$$

$$\sim(y)\sim fy \vee (x)fx$$

Reemplazando en S'' las cuantificaciones impuras por sus

(*) En Logic no aparecen reglas de reducción para ' $\equiv$ ' , de modo que es preciso buscar primero equivalentes composicionales de '$\top \equiv$ fy' y '$F \equiv$ fy' a los que puedan aplicarse las reglas de reducción indicadas expresamente en dicho texto. En Métodos, obra posterior, se proporcionan ya las reglas '$\top \equiv$ p' eq 'p' y '$F \equiv$ p' eq '$\sim$p', perfectamente incorporables, pero sin mayor importancia práctica, a la técnica reductiva de QL.

respectivos equivalentes y unificando la variable:

$\sim[(y)fy.\sim(y)\sim fy.(x)\sim fx. \vee .\sim(y)fy.\sim(y)\sim fy \vee (x)fx]$

$\sim[(x)fx.\sim(x)\sim fx.(x)\sim fx. \vee .\sim(x)fx.\sim(x)\sim fx \vee (x)fx]$

Simplificando:

$$\sim[\sim(x)fx.\sim(x)\sim fx \vee (x)fx]$$
$$(x)fx. \vee .(x)\sim fx.\sim(x)fx$$
$$(x)fx \vee (x)\sim fx$$

Aplicando la prueba de validez:

(1) $(x)fx \vee (x)\sim fx$

V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

(3) El arreglo falso no cumple ninguno de los requisitos prescritos. S, por consiguiente, no es válido.

7. Las observaciones hechas hasta aquí acerca de QL y otras pocas consideraciones más se resumen en los incisos siguientes.

a) La técnica de reducción incorporada a QL asume de facto la técnica resolutiva expuesta detalladamente por Quine, varios años más tarde, en Methods of Logic. Esta técnica, "eleganter, aber unanschaulicher" que el método tabular (*), aunada a las inevitables peripecias de la depuración de cuantificaciones incluso moderadamente complejas, requiere una apreciable capacidad operativa.

Si a esto se suma que el método concebido con idéntico própósito por H. Behmann (**) es mucho más simple y di

(*) Así opina Richard Stender (Didaktische Themen, p.21, nota 8).
(**) Véase Heinrich Behmann, Algebra der Logik, pp. 189-191.

recto, si cabe la expresión, debe admitirse sin grandes titubeos que QL, en esta fase al menos, no es el mejor de los procedimientos decisorios. Incluso el propio Quine adoptó posteriormente la susodicha técnica, descartando ésta que se comenta aquí (*).

b) La prueba de validez de QL no contempla, de la manera explícita y precisa que sería de desear, la forma de llevar adelante las comprobaciones que reclama la regla 3, y pasa por alto la específica situación de los esquemas c-inconsistentes. Como se ha visto en III.4, supra, para salvar dicha desatención y abreviar considerablemente la referida prueba de validez urge incorporar un enunciado adicional a la segunda de sus reglas y poner en claro algunos puntos de la tercera.

Asimismo ha debido indicarse expresamente que cuando la reducción de un esquema no básico conduce a una tautología de la forma '$p \vee \sim p$', como en el ejemplo IV (véase III.2 c, supra), o a 'F', como en el ejemplo V (loc. cit.), no es necesario proseguir con la prueba de validez, pues dichos esquemas han resultado ser ya, en definitiva, válido e inválido, respectivamente.

c) Como en el caso de QS, no es posible aplicar tampoco la prueba de validez de QL a fórmulas con constantes individuales, indispensables en el análisis de inferencias con proposiciones singulares. La razón es por demás simple: salvo el caso de las c-válidas, a las demás, por su peculiar conformación, les es imposible satisfacer, en principio, aún siendo cuantificacionalmente válidas, las exigencias que plantea QL.

(*) Véase IV.6 infra.

d) Poco se puede decir de la laboriosidad de la prueba de validez de QL que no sea aplicable a los demás métodos de Quine y, en principio, a todos los procedimientos decisorios conocidos. Es digna de mención, sin embargo, la fácil aplicabilidad de QL en ciertos casos, sobre todo cuando el esquema es de tal estructura que el número de arreglos decisivos se reduce a una cifra mínima. Entre dichos esquemas se hallan, por ejemplo, los condicionales, cuyo análisis requiere el examen de un único arreglo: a) cuando el antecedente es una conjunción, una disyunción negada o un condicional negado(como el antecedente será verdadero en un solo arreglo,no queda otra cosa que inspeccionar el consecuente de dicho arreglo); o b) cuando el consecuente es una disyunción, una conjunción negada o un condicional (en todos estos casos el consecuente es falso en un arreglo y no hace falta sino ver si en dicho arreglo el antecedente resulta ser verdadero).

Un ejemplo cabal de esta eventual simplicidad lo da la solución de todos los esquemas condicionales cuyo antecedente sea una conjunción y el consecuente una cuantificación básica, como en el caso de todos los silogismos, conjugándose en tales esquemas las dos situaciones descritas en el aparte anterior. Basta en tales casos inspeccionar sólo un arreglo de los ocho que forman parte de la tabla de valores. También son fáciles de resolver, por exhibir apenas un arreglo falso, los esquemas básicos disyuntivos y sus equivalentes.

e) Pero la facilidad no es la regla general. Existen tipos de esquemas básicos que obligan a la inspección de una gran parte de los arreglos de su respectiva tabla, como en el caso de los esquemas conjuntivos, falsos en todos los arreglos menos en uno, y en el de los esquemas condicionales: a) que tengan como antecedente una disyunción, una conjunción negada o un condicional; o b) que tengan como consecuente una conjunción, una disyunción negada o un condicional negado. Por razones simétricas a las indicadas en el inciso anterior, el número de arreglos falsos puede llegar a ser tan alto como el de un esquema conjuntivo: piénsese por ejemplo en un esquema condicional cuyo antecedente es una disyunción y el consecuente una conjunción o un condicional negado.

No es remota además, incluso tratándose de esquemas nada extraordinarios, la posibilidad de tablas con 16 ó 32 arreglos, cuyo escrutinio, por regla general, demanda muchísima atención.

f) No escapa a nadie que la necesidad de establecer si cada arreglo falso cumple o no por lo menos una de las tres condiciones estipuladas por la Regla 3 obliga a realizar, mentalmente o por escrito, con o sin atajos o métodos abreviados, una serie de tablas. Al tratarse de la primera exigencia dicha labor es de hecho bastante fácil, siempre que los operandos sean lo suficientemente simples, pero cuando se está averiguando el cumplimiento o incumplimiento de las otras dos, la cosa corre el riesgo de embrollarse en demasía, pues deben ser tomados en cuenta todos los condicionales y conjunciones cuya c-validez ha de investigarse y cuyo número, en buena hora, ha podido ser reducido apreciablemente merced a las modificaciones propuestas en III.4 supra.

Si se supone que un esquema exhibe cuatro cuantificaciones básicas diferentes, de las cuales una es V- y las tres restantes F-asignadas en una línea o arreglo falso, han de construírse tres condicionales diferentes para comprobar si esta línea cumple o no el requisito 3c. Cuando las cuantificaciones son cinco, y cuatro de ellas F-asignadas, el número de condicionales llega a cuatro. De manera que si, por ejemplo, un esquema contara con cuatro cuantificaciones básicas diferentes y fueran $2^4 - 1$ los arreglos falsos que exhiben por lo menos una cuantificación básica V-asignada, de acuerdo a la regla 3c - ¡modificada! - habría necesidad de efectuar, sólo para verificar dicho requisito, veintiocho tablas accesorias (y si las cuantificaciones fueran cinco y $2^5 - 1$ los arreglos falsos con las características anotadas, el número de tablas accesorias ascendería a setenta y cinco).

La cantidad de tablas accesorias, por tanto, puede elevarse desmesuradamente, con lo cual se torna controvertible, por decir lo menos, la facilidad de la prueba de validez de QL.

g) Claro está que existen atajos o "practical shortcuts"(*) perfectamente aceptables, y, sobre todo, recomendables, si es que se desea aligerar el trabajo, pero no cabe duda que cuando alguien los utiliza, cediendo a los dictados de su sagacidad o de su malicia, la prueba de validez de QL deja en ese mismo instante de ser un procedimiento decisorio, pues los inevitables razonamientos adicionales (como, entre otros, los del ejemplo IV en III.5, supra) desnaturalizan su carácter algorítmico(**).

La alternativa queda pues a la vista: o se llevan a cabo todas las operaciones ordenadas por QL, con lo que puede llegar a ser su aplicación, en muchísimos casos, de lo más tediosa, o se opta por la vía más corta

---

(*) Logic, p. 7.
(**) En el riesgo que puede significar para el no experimentado la seducción de la brevedad no es preciso siquiera insistir.

- ¡cuando la haya! - y entonces aquél deja de ser algorítmico y por tanto decisorio, lo cual, si bien no impide que puedan alcanzarse resultados correctos con deducciones adecuadas, tiene suma importancia desde el punto de vista teórico, nada desdeñable por cierto.

h) No parece haber quedado Quine satisfecho del todo con QL. En Methods of Logic, obra destinada a "desarrollar técnicas adecuadas del razonamiento formal" dando preferencia a la "facilidad técnica" sobre la "elegancia" (*), QL es reemplazado por el nuevo procedimiento que se describe y comenta en el capítulo próximo.

(*) Métodos, p. 21.

C A P I T U L O IV

El Procedimiento QM

1. Los esfuerzos de Quine por perfeccionar una técnica decisoria para fórmulas monádicas de primer grado culminan, por lo menos hasta hoy, con el procedimiento que aparece en Methods of Logic (revised edition), New York, 1959 (*). Éste, que en lo sucesivo será designado con las letras QM, proviene en parte, según afirma el propio autor, del presentado en "On the Logic of Quantification" y "una y otra solución son reminiscencias de procedimientos desarrollados por Behmann (1922) y Parry (1932)" (**), siendo mucho más ágil y pronto que el QS, "que tiende a desarrollos más largos y laboriosos"(+). Anderson y Johnstone, por su parte, lo consideran "perhaps the most practical procedure" entre todos los procedimientos decisorios en uso (++).

QM es decisorio para tres clases de esquemas monádicos: a) esquemas cuantificacionales uniformes cerrados, denominados "puros" en ciertos pasajes, que no son otra cosa que los ya conocidos esquemas básicos; b) esquemas "mixtos" ("mixed schemata"), esquemas básicos "con el añadido de letras sentenciales

---

(*) Esta edición revisada no modifica en nada substancial, en lo que concierne al punto aquí estudiado, a la primera edición de 1950, donde se expone el método por primera vez. La traducción castellana de la edición de 1959, debida a Manuel Sacristán, lleva por título "Los Métodos de la Lógica" (Barcelona, Ariel, 1962).

(**) Métodos, p. 170, n. 1. En lo sucesivo, y para comodidad del lector, las referencias se tomarán, como en este caso, de la traducción castellana, no del todo feliz, mencionada en la nota anterior.

(+) Loc. cit.

(++) Natural deduction, p. 338, donde se halla vertido en dos líneas: una vez negado el esquema "we reduce this to normal form and determine whether it is satisfiable - if not, the argument is valid". Ya se verá si la cosa es tan simple.

o de enunciado" (*); y c) esquemas "atípicos" ("nonstandard"), los cuales, a diferencia de los dos anteriores (típicos o "standard") (**), poseen cuantificaciones impuras, esto es, cuantificaciones en cuyos operandos aparecen componentes que "no muestran instancias libres de la variable cuantificada" (+).

Es de interés anotar que cuando Quine habla de los esquemas monádicos solubles mediante QM, piensa únicamente en esquemas condicionales (++), sin mencionar en parte alguna cómo QM puede ser y es en efecto aplicable a cualquier otro tipo de esquema monádico. Quine, aparte de los esquemas condicionales, sólo aborda el caso de la prueba de la equivalencia, reduciéndola, como no puede ser de otro modo, a una doble y recíproca prueba de implicación (*+). Pero nada obsta para reducir también la prueba de la conjunción o de la disjunción a la de implicación, sabiéndose como se sabe que todo esquema monádico puede transformarse en un esquema condicional, negado o no, equivalente. Sin embargo , como se verá luego, no es forzosa tal reducción previa, que se menciona sólo como justificación o razón teórica, pudiendo QM ser aplicado directamente a cualquier esquema monádico (+*).

La versión de QM ofrecida en las páginas que siguen prescinde deliberadamente de esta limitación que Quine implícitamente parece imponerle y, además, pese a la rigurosa fidelidad que se observará en lo que respecta al contenido, habrá de diferir

---

(*) Métodos, p. 262.
(**) Loc. cit.
(+) Ibid., p. 263.

(++) Ibid., p. 153 y 154.
(*+) Ibid., p. 168.
(+*) La reducción de un esquema equivalente o bicondicional a dos esquemas condicionales propuesta por Quine (loc. cit.) no es siquiera una <u>condición</u> para la aplicación de QM a dicho tipo de esquemas, sino <u>una concesión</u> en favor de la facilidad del trabajo, pues nada impide someter de inmediato a QM un esquema bicondicional.

bastante de la exposición original, más bien dilatada y dispersa, que hace lo suyo para tornar la comprensión de QM en algo mucho más arduo de lo que es en realidad.

2. Reposa el procedimiento QM en una idea central: Si un esquema cualquiera S es válido, su contradictorio $\sim S$ será inconsistente. De manera que decidir sobre la validez de S equivale a decidir sobre la inconsistencia de $\sim S$. El problema por resolver se convierte entonces en cómo determinar si un esquema $\sim S$ es o no consistente (*).

Para ello se somete a $\sim S$ a una serie de transformaciones que habrán de culminar irremisiblemente en uno de tres resultados: 'V', 'F' o un esquema, con ciertos requisitos formales, que Quine llama "esquema canónico". El resultado V indicará que $\sim S$ es composicionalmente válido y que S, por tanto, es válido. El resultado F significará a su vez la inconsistencia composicional de $\sim S$ y, por lo mismo, la validez de S. En la tercera y última alternativa no hay más remedio que proceder a una "prueba de consistencia", como la denomina Quine, para saber si el esquema monádico alcanzado es o no consistente. Si lo fuere, S no es válido. En caso contrario S es válido.

Esta idea central de QM se plasma en una serie ordenada de fases, descritas a continuación (**):

Sea S, por ejemplo, el esquema cuantificacional uniforme

$$(x)\sim(Fx.Gx.\sim Hx).\sim(x)(Hx. \supset .Fx.Gx).\sim(\exists x)[Gx.\sim(Gx \vee Hx)] \quad S$$

Se trata de determinar si S es válido o no. El primer paso o paso preparatorio consiste en la negación de S para obte-

(*) Recuérdese que debe entenderse "consistencia" como consistencia cuantificacional, a diferencia de "c-consistencia" o consistencia composicional.

(**) Se empezará exponiendo la aplicación de QM a esquemas básicos o uniformes, destinando 4 y 6, infra, al tratamiento de los esquemas mixtos y atípicos.

ner su contradictorio

$\sim\{(x)\sim(Fx.Gx.\sim Hx).\sim(x)(Hx. \supset .Fx.Gx).\sim(\exists x)[Gx.\sim(Gx \vee Hx)]\}$. $\sim S$

En seguida se debe internar la negación hasta donde sea posible, obteniéndose de este modo un esquema $\sim S_o$, equivalente a $\sim S$:

$\sim(x)\sim(Fx.Gx.\sim Hx) \vee (x)(Hx. \supset .Fx.Gx) \vee (\exists x)[Gx.\sim(Gx \vee Hx)]$ $\sim S_o$

Debe procederse luego a las siguientes operaciones:

a) Substitución de los cuantificadores universales por cuantificadores existenciales y eliminación de las dobles negaciones que puedan resultar, recomendándose, para mayor comodidad operativa, suprimir todas las 'x': "de ello no puede resultar ambigüedad alguna, pues basta con que sobrentendamos una 'x' tácita detrás de cada letra mayúscula (*) y de cada '(∃)' ". (**) También conviene eliminar los paréntesis de '(∃)'. $\sim S_o$ se escribirá entonces:

$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim\exists\sim(H. \supset .F.G) \vee \exists[G.\sim(G \vee H)]$ $\sim S_1$

b) Transformación de cada operando en "esquema normal"(+) o en un esquema de la forma 'F.~F'. De los tres operandos de $\sim S_1$ el primero es ya un esquema normal, de manera que sólo los otros dos requieren manipulación. El proceso es el siguiente:

(*) Téngase presente que en Métodos "letra mayúscula" es sinónimo de "letra o variable predicativa". Este motivo, más el respeto al texto original, ha llevado a cambiar, sólo en este capítulo, la escritura usual de las fórmulas cuantificadas.

(**) Op. cit., p. 157.

(+) Según Métodos, p. 99, a) una letra proposicional o su negación se denomina "literal"; b) un literal o una conjunción de literales en la que ninguna letra aparece dos veces se denominan "esquemas fundamentales"; y c) un "esquema normal" es siempre o un esquema fundamental o una disyunción de éstos.

$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim \exists[H.\sim(F.G)] \vee \exists(G.\sim G.\sim H)$
$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim \exists(H.\sim F \vee \sim G) \vee \exists(G.\sim G.\sim H)$
$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim \exists(H.\sim F. \vee .H.\sim G) \vee \exists(G.\sim G.\sim H)$ $\sim S_2$

c) Reducción de $\sim S_2$ mediante el método resolutivo, substituyendo por '$\perp$' toda ocurrencia de '$\exists(F.\sim F)$'. $\sim S_3$, el resultado, es equivalente a

$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim \exists(H.\sim F. \vee .H.\sim G) \vee \perp$
$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim \exists(H.\sim F. \vee .H.\sim G)$ $\sim S_3$

Esta reducción conduce a una de dos alternativas:

I) $\sim S_2$ se resuelve en '$\top$' o en '$\perp$'. La decisión, en este caso, se ha alcanzado: $\sim S_2$ será c-válido (y S, por tanto, no válido) si aquella culmina en '$\top$' y c-inconsistente (y S válido) si lo hace en '$\perp$'.

II) $\sim S_2$ no se resuelve ni en '$\top$' ni en '$\perp$', como en el caso del ejemplo, dando lugar, en cambio, a otro esquema equivalente $\sim S_3$. El proceso, en tal caso, debe proseguir.

d) Distribución de los cuantificadores existenciales respecto a las disyunciones de los operandos. El resultado será $\sim S_4$, compuesto exclusivamente por cuantificaciones existenciales de "esquemas abiertos fundamentales", esto es, esquemas fundamentales en los que aparecen 'Fx', 'Gx', etc., en vez de 'p', 'q', etc. (*). Se tiene entonces, continuando con el ejemplo,

$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim[\exists(H.\sim F) \vee \exists(H.\sim G)]$ $\sim S_4$

e) Si $\sim S_4$ "es como un esquema normal ..... excepto en que en lugar de las letras esquemáticas tiene cuantifica-

(*) Ibid., p. 157

ciones existenciales de esquemas abiertos fundamenta- les" (*), se dice que $\sim S_4$ es el "esquema canónico" de $\sim S$. Si $\sim S_4$ no lo fuera ya, deben tratarse sus cuantificaciones como letras proposicionales y transformarlo mediante conocidas reglas de la Lógica Proposicional hasta llegar, bien a un esquema c-inconsistente (**), bien al esquema canónico de $\sim S$. En el primer caso la operación ha terminado: S es válido. En el segundo habrá aún necesidad de saber si el esquema canónico obtenido es consistente o no. Volviendo al ejemplo, la transformación indicada conduce al siguiente esquema canónico:

$$\exists(F.G.\sim H) . \vee . \sim\exists(H.\sim F).\sim\exists(H.\sim G) \qquad \text{EC}$$

Un esquema canónico debe ser forzosamente:

i) La cuantificación existencial de un esquema abierto fundamental (Ejemplos: $\exists F, \exists\sim F, \exists(F.G), \exists(\sim F.G.\sim H)$)

o ii) la negación de un esquema de la forma (i)

o iii) la conjunción de dos o más esquemas de la forma (i)

o iv) la conjunción de dos o más esquemas de la forma(ii)

(*) Ibid., p. 158.
(**) Tanto en Methods, p. 106,como en Métodos, p. 158, aparece escrito '$\top$' en vez de "inconsistente". Debe presumirse que aquí existe error, pues Quine, al explicar este punto, habla de "transformar [$\sim S_4$] por el método del parágrafo 10" (loc.cit.). Y este método no es otra cosa que "una rutina general para transformar cualquier [truth-function] en un esquema equivalente que es 'p.~p' o un esquema normal"(op. cit., p. 100),es decir, que es c-INConsistente o no lo es. Además, desde el punto de vista de la prueba de validez de QM, que es lo que al fin y al cabo interesa, traer a colación la diferencia entre la c-validez y la c-[redacted]consistencia de un esquema canónico es inconducente e inútil,pues en ambos casos, como se verá en el inciso siguiente, dicho esquema es consistente (y S, naturalmente, inválido). La diferencia, en cambio, entre la c-inconsistencia y cualquiera de las otras dos posibilidades sí es decisiva. Todo hace sospechar, por lo tanto, que debe leerse '$\bot$' en vez de'$\top$'.

o v) la conjunción de dos o más esquemas de las formas (i) y (ii)

o vi) la disyunción de dos o más esquemas de las formas (i) - (v).

EC, obvio resulta decirlo, es un esquema canónico de la forma (vi) por tratarse de la disyunción entre un esquema de la forma (i) y otro de la forma (iv).

f) Quine demuestra (*) lo siguiente:

a) Los esquemas canónicos de las formas (i), (ii) y (iii) son siempre consistentes.

b) Los de la forma (iv) son consistentes si y sólo si la expresión que resulta de borrar los cuantificadores es c-consistente.

c) Los de la forma (v) son consistentes si y sólo si ninguno de los operandos de las cuantificaciones no negadas del esquema canónico implican composicionalmente a la disyunción de operandos de las demás cuantificaciones (o al operando de la cuantificación restante, si sólo hubiera una).

d) Los de la forma (vi) son consistentes si y sólo si al menos uno de los miembros de la disyunción es consistente.

Las operaciones que demandan estas reglas constituyen lo que llama Quine "prueba de consistencia" y una vez cumplida ésta, se sabrá ya si un esquema canónico es consistente o no, y, por supuesto, si el esquema básico inicial es o no válido. La consistencia de aquél acarrea la de ~S y, al mismo tiempo, la invalidez de S, mientras que su inconsistencia determina

---

(*) Ibid., pp. 161-167.

la de $\sim S$ y la validez de S.

En el ejemplo que se ha venido desarrollando, $\sim S_5$ es consistente por pertenecer a la forma (vi) y ser consistente el primero de sus componentes, comprendido en la forma (i).S, por tanto, no es válido.

3. En esta sección se ofrecen algunos sencillos ejemplos de la aplicación de QM.

I) $(\exists x)(fx \equiv fx)$ S

$\sim \exists (F \equiv F)$ $\sim S$

Hallando el esquema normal del operando:

$$\sim \exists (F \supset F . F \supset F)$$
$$\sim \exists (F \supset F)$$
$$\sim \exists (\sim F \vee F)$$

Distribuyendo el cuantificador:

$$\sim [\exists \sim F \vee \exists F]$$

Canonizando:

$$\sim \exists \sim F . \sim \exists F \qquad \text{EC(iv)}$$

Borrando los cuantificadores:

$$F . \sim F$$

Como EC ha resultado ser inconsistente, S es válido.

II) $(x)(fx . gx \vee \sim fx)$ S

Substituyendo el cuantificador y negando la expresión resultante:

$$\exists \sim (F . G \vee \sim F) \qquad \sim S$$

Normalizando el operando y distribuyendo el cuantificador:

$$\exists [\sim (F . G) . \sim \sim F]$$

$$\exists [\sim F \vee \sim G . F]$$

$$\exists[\sim F.F.\vee.\sim G.F]$$
$$\exists(\sim F.F).\vee.\exists(\sim G.F)$$

Substituyendo '$\exists(\sim F.F)$' por '$\perp$' y resolviendo:

$$\perp\vee\exists(\sim G.F)$$
$$\exists(\sim G.F) \qquad \text{EC(.i)}$$

De acuerdo a lo indicado $\sim S$ es consistente, y S, por tanto, no es válido.

III) $(x)(fx\supset gx).(\exists x)(hx.fx).\supset.(\exists x)(hx.gx)$ S

Substituyendo cuantificadores y negando S:

$$\sim[\sim\exists\sim(F\supset G).\ \exists(H.F).\supset.\ \exists(H.G)] \qquad \sim S$$

Simplificando y normalizando los operandos:

$$\sim\exists\sim(F\supset G).\ \exists(H.F).\sim\exists(H.G)$$
$$\sim\exists(F.\sim G).\ \exists(H.F).\sim\exists(H.G) \qquad \text{EC(V)}$$

Como el único componente no negado de EC implica a la disyunción de los negados, lo que se comprueba fácilmente efectuando la tabla de valores para '$H.F.\supset:F.\sim G.\vee.H.G$' , $\sim S$ es inconsistente y S válido.

IV) $(x)(hx.\supset.cx.dx).(\exists x)(hx.cx\vee Sx).\supset.(\exists x)(cx.Sx)$ S

Substituyendo los cuantificadores y negando S:

$$\sim[\sim\exists\sim(H.\supset.C.D).\ \exists(H.C\vee S).\supset.\ \exists(C.S)] \qquad \sim S$$

Simplificando $\sim S$ y normalizando los operandos:

$$\sim\exists\sim(H.\supset.C.D).\ \exists(H.C\vee S).\sim\exists(C.S)$$
$$\sim\exists[H.\sim(C.D)].\ \exists(H.C.\vee.H.S).\sim\exists(C.S)$$
$$\sim\exists[H.\sim C\vee\sim D].\ \exists(H.C.\vee.H.S).\sim\exists(C.S)$$
$$\sim\exists[H.\sim C.\vee.H.\sim D].\ \exists(H.C.\vee.H.S).\sim\exists(C.S)$$

Distribuyendo los cuantificadores y canonizando:

$$\sim[\exists(H.\sim C)\vee\exists(H.\sim D)].\ \exists(H.C)\vee\exists(H.S).\sim\exists(C.S)$$
$$\sim\exists(H.\sim C).\sim\exists(H.\sim D).\ \exists(H.C)\vee\exists(H.S).\sim\exists(C.S)$$

$\sim \exists(H.\sim C).\sim \exists(H.\sim D).\sim \exists(C.S).\ \exists(H.C).\vee.$
$.\vee.\sim \exists(H.\sim C).\sim \exists(H.\sim D).\sim \exists(C.S).\ \exists(H.S)$ EC(vi)

El primer componente de la disyunción pertenece a la forma V y debe por tanto establecerse si es o no válido el condicional:

$$H.C.\supset: H.\sim C.\vee.H.\sim D.\vee.C.S$$

Como no hay implicación, dicho componente es consistente. No hay necesidad de continuar pues con el resultado obtenido EC y $\sim S$ son consistentes. De manera que S es inválido.

V) $(\exists x)fx.(\exists x)gx.\supset.(x)(fx\supset \sim gx)\supset(\exists x)(gx.\sim fx)$ S

$\sim[\exists F.\exists G.\supset.\sim \exists\sim(F\supset\sim G)\supset \exists(G.\sim F)]$ $\sim S$

Simplificando, normalizando los operandos y canonizando la expresión:

$$\exists F.\ \exists G.\sim[\sim \exists\sim(F\supset \sim G)\supset \exists(G.\sim F)]$$
$$\exists F.\ \exists G.\sim \exists\sim(F\supset \sim G).\sim \exists(G.\sim F)$$
$$\exists F.\ \exists G.\sim \exists(F.G).\sim \exists(G.\sim F) \qquad \text{EC(v)}$$

Debe considerarse ahora si 'F' y 'G' implican, por separado, la disyunción de los operandos de los otros dos componentes.

a) $F.\supset: F.G.\vee.G.\sim F$

'F' no implica a la disyunción, como es fácil apreciar.

b) $G.\supset.F.G.\vee.G.\sim F$

'G' sí la implica, de manera que, como ninguno de los operandos no negados debe implicar a la disyunción de los negados en caso de ser EC consistente, éste no lo es en el ejemplo, $\sim S$ tampoco, y S, en consecuencia, es válido.

VI) $(\exists x)fx\vee(x)gx.\supset.(\exists x)(fx\vee gx)$ S

$\sim[\exists F\vee\sim \exists\sim G.\supset.\ \exists(F\vee G)]$ $\sim S$

Simplificando, etc. :

$$\exists F \vee \sim \exists \sim G . \sim \exists (F \vee G)$$
$$\sim\exists (F \vee G) . \ \exists F . \vee . \sim \exists (F \vee G) . \sim\exists \sim G \qquad EC(vi)$$

Analizando el primer componente, que pertenece a su vez a la forma(v),se aprecia que 'F' implica a '$F \vee G$' y por lo tanto es inconsistente.

El segundo, de la forma(iv),es también inconsistente,pues, luego de borrar los cuantificadores, '$\sim(F \vee G) . \sim \sim G$' es inconsistente.

Como ninguno entonces de los componentes de EC es consistente, ni EC ni $\sim$S lo son, y S es válido.

4. El procedimiento QM es aplicable también a los que Quine titula "esquemas mixtos" (ibid. p. 172), esto es, "esquemas [cuantificacionales uniformes] con el añadido de letras sentenciales o de enunciado" (ibid., p. 262). Debe entenderse que las letras proposicionales o, como se las denomina en el pasaje citado, letras sentenciales, no aparecen dentro de los operandos, es decir, que un esquema mixto se compone sólo de aquellas cuantificaciones que en el capítulo anterior se denominaron simples o básicas (véase III.1,supra), más letras proposicionales y conectivas (*).

La idea medular de QM sigue en pie: se trata de decidir si $\sim$S es inconsistente, pero para ello es preciso ahora, antes de proceder a las transformaciones de rutina, reducir el esque

(*) Aunque podría parecerlo, no es posible considerar como letras proposicionales a los componentes constituídos por letras predicativas seguidas por constantes individuales, pues en tal caso la técnica indicada no puede impedir resultados inaceptables, como el del ejemplo V de la sección siguiente.

ma mixto S a otro básico, lo que se logra otorgando los valores '⊤' y '⊥' a las letras proposicionales y continuando con la técnica reductora descrita en Métodos, §§ 5 y 6. Dicha reducción llevará a una de tres posibilidades:

a) Se termina en ⊤ (∼S es c-válido y S, por tanto, no válido).
b) Se termina en ⊥ (∼S es c-inconsistente y S válido).
c) Se termina en uno o más esquemas cuantificacionales puros, esto es, sin letras proposicionales.

Como es obvio, la tercera alternativa obliga a someter a la técnica básica de QM a cada uno de los esquemas "puros" obtenidos. Tan pronto como uno de éstos resulte consistente "podemos detener el trabajo, pues ello nos basta para saber que el esquema mixto original [∼S] es consistente" (ibid., p. 172) y S no válido. Si y sólo si ninguno fuera consistente, S es válido.

De manera que, cuando se trate de esquemas mixtos, el proceso de decisión comprende tres etapas:

a) Contradicción de S.
b) Reducción de ∼S, que habrá de conducir a una decisión o a uno o varios "esquemas cuantificacionales puros".
c) En caso de no haberse obtenido una decisión, aplicación de QM a cada uno de los esquemas puros residuales.

5. Siguen algunos ejemplos aclaratorios.

I) $\sim[(\exists x)(fx.gx).p.\sim(p.(x)fx)]$ (*) S

Negando S y substituyendo cuantificadores:

$(\exists x)(fx.gx).p.\sim[p.\sim(\exists x)\sim fx)]$ ∼S

(*) Este esquema y el del ejemplo siguiente aparecen en Métodos, § 32, como ilustraciones de esquemas mixtos.

Eliminando 'p':

$\exists(F.G).\top.\sim(\top.\sim\exists\sim F)$	$\exists(F.G).\bot.\sim(\bot.\sim\exists\sim F)$
$\exists(F.G).\sim\sim\exists\sim F$	$\bot$
$\exists(F.G).\exists\sim F$	

El esquema puro obtenido se halla en forma canónica y pertenece al tipo (iii). $\sim S$ es entonces consistente y S inválido.

II) $\sim p.(\exists x)\sim fx.\vee.\sim(y)fy.\vee.(\exists x)\sim gx$ S

Negando S, substituyendo cuantificadores y borrando las variables:

$$\sim[\sim p.(\exists x)\sim fx.\vee.\sim(y)fy.\vee.(\exists x)\sim gx]$$
$$\sim[\sim p.\exists\sim F.\vee.\exists\sim F.\vee.\exists\sim G]$$
$$p\vee\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G \qquad \sim S$$

Eliminando 'p':

$\top\vee\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G$	$\bot\vee\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G$
$\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G$	$\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G$

Los dos esquemas puros se hallan en forma canónica y no queda otra cosa que someterlos a la prueba de consistencia:

a) '$\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G$' pertenece a la forma (iv) y es siempre consistente. Esto basta para saber que $\sim S$ es consistente y S inválido.

III) $p.\supset.q.(x)(fx\supset\sim gx):q\supset(\exists x)(fx.gx\vee hx:\supset.p\supset(\exists x)(hx.\sim gx)$ (*) S

Negando S, etc.:

$$\sim[p.\supset.q.\sim\exists\sim(F\supset\sim G):q\supset\exists(F.G\vee H):\supset.p\supset\exists(H.\sim G)]$$
$$p.\supset.q.\sim\exists\sim(F\supset\sim G):q\supset\exists(F.G\vee H):\sim[p\supset\exists(H.\sim G)]$$
$$p.\supset.q.\sim\exists\sim(F\supset\sim G):q\supset\exists(F.G\vee H):\quad p:\sim\exists(H.\sim G) \qquad \sim S$$

(*) Este esquema mixto aparece en Métodos, p. 171, donde se ilustra la manera de obtener su equivalente puro, dejando al lector la prueba de su consistencia.

Eliminando 'p' y 'q' (utilizando letras auxiliares en vez de cuantificaciones por razones de comodidad):

$$\top . \supset . q . \sim A : q \supset B : \top : \sim C \quad \Big| \quad \bot . \supset . q . \sim A : q \supset B : \bot : \sim C$$

$$q . \sim A . q \supset B . \sim C \qquad\qquad \bot$$

$$\top . \sim A . \top \supset B . \sim C \quad \Big| \quad \bot . \sim A . \bot \supset B . \sim C$$

$$\sim A . B . \sim C \qquad\qquad \bot$$

La expresión reducida de $\sim S$ es:

$$\sim \exists \sim (F \supset \sim G) . \exists (F . G \vee H) . \sim \exists (H . \sim G)$$

Normalizando y canonizando:

$$\sim \exists (F . G) . \exists (F . G . \vee . F . H) . \sim \exists (H . \sim G)$$

$$\sim \exists (F . G) . \exists (F . G) \vee \exists (F . H) . \sim \exists (H . \sim G)$$

$$\sim \exists (F . G) . \sim \exists (H . \sim G) . \exists (F . G) . \vee . \sim \exists (F . G) . \sim \exists (H . \sim G) . \exists (F . H) \qquad EC(vi)$$

El primer componente de EC, que pertenece a la forma (v), es inconsistente, pues '$F . G$' implica a '$F . G . \vee . H . \sim G$'. También es inconsistente el segundo componente, de la misma forma que el primero, pues '$F . H$' implica a '$F . G . \vee . H . \sim G$'. Por lo tanto $\sim S$ es inconsistente y S válido.

IV) $(\exists x)(fx . gx) . p . p \supset (\exists x) \sim fx . \equiv . (\exists x)(fx . gx) . (\exists x) \sim fx$ S

Según Métodos, p. 168, S será válido si y sólo si lo son los dos condicionales siguientes:

a) $(\exists x)(fx . gx) . p . p \supset (\exists x) \sim fx . \supset . (\exists x)(fx . gx) . (\exists x) \sim fx$ S'

b) $(\exists x)(fx . gx) . (\exists x) \sim fx . \supset . (\exists x)(fx . gx) . p . p \supset (\exists x) \sim fx$ S''

Debe pues procederse a analizarlos por separado.

a) Negando S', etc.:

$$\sim [\exists (F . G) . p . p \supset \exists \sim F . \supset . \exists (F . G) . \exists \sim F] \qquad \sim S'$$

$$\exists (F . G) . p . p \supset \exists \sim F . \sim [\exists (F . G) . \exists \sim F]$$

$$\exists (F . G) . p . p \supset \exists \sim F . \sim \exists (F . G) \vee \sim \exists \sim F$$

Eliminando 'p' :

$\exists(F.G).\top.\top \supset \exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G) \vee {\sim}\exists{\sim}F$	$\exists(F.G).\bot.\bot \supset \exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G) \vee {\sim}\exists{\sim}F$
$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G) \vee {\sim}\exists{\sim}F$	$\bot$

Canonizando el esquema puro obtenido se llega a:

$$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G).\vee.\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists{\sim}F$$

cuyos dos componentes son c-inconsistentes. $\sim S'$ es entonces inconsistente y S' válido.

b) Negando S", etc.

$${\sim}[\exists(F.G).\exists{\sim}F. \supset .\exists(F.G).p.p \supset \exists{\sim}F] \qquad {\sim}S''$$

$$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}[\exists(F.G).p.p \supset \exists{\sim}F]$$

$$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G) \vee {\sim}p \vee {\sim}(p \supset \exists{\sim}F)$$

$$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G) \vee {\sim}p \vee (p.{\sim}\exists{\sim}F)$$

Eliminando 'p' :

$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G) \vee {\sim}\top \vee (\top.{\sim}\exists{\sim}F)$	$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G) \vee {\sim}\bot \vee (\bot.{\sim}\exists{\sim}F)$
$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G) \vee \bot \vee {\sim}\exists{\sim}F$	$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G) \vee \top \vee \bot$
$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G) \vee {\sim}\exists{\sim}F$	$\exists(F.G).\exists{\sim}F$

Cada uno de estos dos esquemas puros debe ser probado para la consistencia.

bI) Canonizando el primero de ellos se llega a:

$$\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists(F.G).\vee.\exists(F.G).\exists{\sim}F.{\sim}\exists{\sim}F$$

que es inconsistente, pues sus dos componentes son c-inconsistentes.

bII) El segundo se halla en forma canónica y es del tipo (iii), siempre consistente.

En resumen: $\sim S''$ es consistente y S", por tanto, inválido, de manera que S no es válido.

V) $(x)(fx \supset gx).fa. \supset .ga$ (*) S

Negando S, etc. :

$$\sim[(x)(fx \supset gx).fa. \supset .ga]$$
$$\sim[\sim\exists\sim(F \supset G).fa. \supset .ga]$$
$$\sim\exists\sim(F \supset G).fa.\sim ga$$
$$\sim\exists(F.\sim G).fa.\sim ga \qquad \sim S$$

Eliminando 'fa' y 'ga' :

$$\sim\exists(F.\sim G).\top.\sim ga \quad\Big|\quad \sim\exists(F.\sim G).\bot.\sim ga$$
$$\sim\exists(F.\sim G).\sim ga \quad\Big|\quad \bot$$
$$\sim\exists(F.\sim G).\sim\top \quad\Big|\quad \sim\exists(F.\sim G).\sim\bot$$
$$\sim\exists(F.\sim G).\bot \quad\Big|\quad \sim\exists(F.\sim G).\top$$
$$\bot \quad\Big|\quad \sim\exists(F.\sim G)$$

$\sim$S se ha reducido a '$\sim\exists(F.\sim G)$', esquema puro, en forma canónica (ii), siempre consistente. S, por lo tanto, no es válido, <u>para QM.</u> Su validez, sin embargo, es demostrable por cualquier otro procedimiento decisorio APROPIADO e, incluso,por cualquier razonamiento que tome en cuenta el significado del cuantificador universal. La inoperancia de QM en este caso debe atribuirse al hecho que la validez de S depende de la peculiar relación entre la cuantificación y los componentes en que aparecen constantes individuales. Al ser eliminados éstos, la antedicha relación no se halla presente en el esquema puro residual que,por lo tanto,no tiene por qué ser válido. Tal cosa no sucede cuando los componentes eliminados son letras proposicionales,como en los ejemplos anteriores,ya que no existe ninguna relación es-

(*) Este ejemplo no tiene otro objeto que mostrar cómo existen esquemas no básicos, no considerados tales en Métodos, que QM no puede resolver satisfactoriamente. Véase sección 4, supra.

tructural entre letras proposicionales y cuantificaciones.

6. Los esquemas considerados hasta aquí han sido esquemas uniformes o mixtos. Existen, sin embargo, ciertos esquemas monádicos con otra estructura y a éstos llama Quine "esquemas monádicos atípicos"("non-standard monadic schemata")(*)."En los esquemas monádicos atípicos las cuantificaciones son frecuentemente impuras en el sentido siguiente: el alcance del cuantificador es una función veritativa algunos de cuyos componentes no muestran instancias libres de la variable cuantificada" (**). En otras palabras: para que un esquema monádico sea atípico deberá poseer por lo menos una cuantificación dentro de cuyo operando aparezca una letra proposicional y/o una variable que no es la de cuantificación y/o una cuantificación pura o no. Ejemplos de estos esquemas atípicos son los siguientes: $(x)(fx \supset p)$, $(\exists x)(fy \supset gx)$, $(x)[fx \supset (\exists y)(fy.\sim gy)]$, $(x)(p. \supset .fy \supset gx)$.

La aplicación de QM a un esquema atípico S requiere como paso previo la eliminación, en dicho esquema, de la o las cuantificaciones impuras, o, más precisamente, se debe transformar S en un esquema equivalente S' que sea típico, esto es, uniforme o mixto. Esta transformación se lleva a efecto mediante una técnica descrita por Quine en Métodos, pp. 263-65, que no es otra que la introducida por H. Behmann (+) para, como escriben Hilbert y Bernays, "jede Formel des einstelligen Prädikatenkalküls in eine solche aus Primärformeln zusammengesetzte Formel über-

(*) Métodos, p. 263.
(**) Loc. cit.. Como se ve, no se incluyen entre las "impurezas" a las fórmulas elementales compuestas de una letra predicativa seguida por una constante individual. Cuando un esquema monádico exhibe una fórmula de esa especie, QM, lo mismo que QS y QL, no garantiza la corrección del resultado. Véase 5, supra, ejemplo V.
(+) Algebra der Logik, pp. 189-91.

führen oder, wie wir kurz sagen wollen, 'in Primärformeln zerlegen' " (*).

Dicha técnica, tal como aparece en Métodos, consiste en substituir primero todos los cuantificadores universales por cuantificadores existenciales, de acuerdo a conocidas reglas, y en eliminar, acto seguido, las conectivas que no sean ".", "v" y "~" de los operandos de las cuantificaciones existenciales impuras que no contengan como parte alguna otra cuantificación impura, transformando luego la expresión obtenida "de tal modo que las impurezas quedan sujetas sólo a disyunción o sólo a conjunción o a una conjunción que se encuentra bajo disyunción" (**). Luego, mediante la distribución de los cuantificadores y la aplicación de las reglas de confinamiento es fácil deshacerse de las impurezas. "Aplicado a cualquier cuantificación existencial impura que no contenga a su vez otra cuantificación impura, es claro que este procedimiento convertirá la cuantificación impura en un esquema en el cual todas las cuantificaciones serán puras" (+). Este proceder se repite "hacia afuera hasta conseguir que no quede ninguna cuantificación impura en el esquema" (++).

"Finalmente, reliteralizando las variables diversas de 'x' para que todas sean 'x', obtenemos un esquema monádico típico" (*+). Como éste habrá de ser forzosamente uniforme o mixto, no resta ya sino proceder a resolverlo de acuerdo a las reglas usuales.

(*) Hilbert-Bernays, Grundlagen I, p. 146.
(**) Métodos, p. 264.
(+) Ibid., p. 265.
(++) Loc. cit.
(*+) Loc. cit.

7. He aquí algunos ejemplos:

I) $$(x)(fx \cdot p) \cdot \supset \cdot (\exists x)(gx \cdot \supset \cdot fx, p) \qquad S$$

Hallando primero el esquema mixto equivalente:

$$\sim(\exists x)\sim(fx \cdot p) \cdot \supset \cdot (\exists x)(gx \cdot \supset \cdot fx \cdot p)$$
$$\sim(\exists x)(\sim fx \vee \sim p) \cdot \supset \cdot (\exists x)(\sim gx \cdot \vee \cdot fx \cdot p)$$
$$(\exists x)(\sim fx \vee \sim p) \vee (\exists x)(\sim gx \cdot \vee \cdot fx \cdot p)$$
$$(\exists x) \ \sim fx \vee \sim p \ \vee (\exists x)\sim gx \vee (\exists x)(fx \cdot p)$$
$$(\exists x) \ \sim fx \cdot \vee \cdot \sim p \cdot \vee \cdot (\exists x)\sim gx \cdot \vee \cdot (\exists x)fx \cdot p$$

Negando la expresión para obtener $\sim S$ y eliminando luego 'p' y 'q' :

$$\sim(\exists x)\sim fx \cdot p \cdot \sim(\exists x)\sim gx \cdot \sim[(\exists x)fx \cdot p] \qquad \sim S$$

$$\begin{array}{l|l} \sim(\exists x)\sim fx \cdot \top \cdot \sim(\exists x)\sim gx \cdot \sim[(\exists x)fx \cdot \top] & \sim(\exists x)\sim fx \cdot \bot \cdot \sim(\exists x)\sim gx \cdot \sim[(\exists x)fx \cdot \bot] \\ \sim(\exists x)\sim fx \cdot \sim(\exists x)\sim gx \cdot \sim(\exists x)fx & \bot \end{array}$$

La reducida de $\sim S$, es decir, su esquema básico equivalente, ya está en forma canónica.

$$\sim\exists\sim F \cdot \sim\exists\sim G \cdot \sim \exists F \qquad EC(iv)$$

Borrando los cuantificadores se aprecia que EC es inconsiste. $\sim S$ también lo es y S resulta ser válido.

II) $$(x)(y)(\exists z)(fx \supset gz \cdot \supset \cdot fx \supset gy) \qquad S$$

Obteniendo el esquema puro correspondiente:

$$\sim(\exists x)\sim\sim(\exists y)\sim(\exists z)[\sim(fx \supset gz) \cdot \vee \cdot fx \supset gy]$$
$$\sim(\exists x)(\exists y)\sim(\exists z)[fx \cdot \sim gz \cdot \vee \cdot \sim fx \cdot \vee \cdot gy]$$
$$\sim(\exists x)(\exists y)\sim[fx \cdot \exists\sim gz \cdot \vee \cdot \sim fx \cdot \vee \cdot gy]$$
$$\sim(\exists x)(\exists y)[\sim fx \vee \sim(\exists z)\sim gz \cdot fx \cdot \sim gy]$$
$$\sim(\exists x)[\sim fx \vee \sim(\exists z)\sim gz \cdot fx \cdot (\exists y)\sim gy]$$
$$\sim(\exists x)\{[\sim fx \cdot fx \cdot \vee \cdot \sim(\exists z)\sim gz \cdot fx] \cdot (\exists y)\sim gy\}$$
$$\sim(\exists x)[\sim(\exists z)\sim gz \cdot fx \cdot (\exists y)\sim gy]$$
$$\sim[\sim(\exists z)\sim gz \cdot (\exists x)fx \cdot (\exists y)\sim gy]$$
$$\sim[\sim\exists\sim G \cdot \exists F \cdot \exists\sim G]$$
$$\sim\exists\sim G \cdot \exists F \cdot \exists\sim G \qquad \sim S$$

$\sim$S se halla ya en forma canónica y pertenece a la forma(v). 'F' no implica a '$\sim$G', pero '$\sim$G' sí implica a '$\sim$G'. De modo que $\sim$S es inconsistente y S es válido.

III) $(\exists x)(y)(fy \vee gx.hx)$ S

Hallando el esquema puro equivalente:

$$(\exists x)\sim(\exists y)\sim(fy \vee gx.hx)$$
$$(\exists x)\sim(\exists y)[\sim(fy \vee gx) \vee \sim hx]$$
$$(\exists x)\sim(\exists y)(\sim fy.\sim gx. \vee .\sim hx)$$
$$(\exists x)\sim[(\exists y)\sim fy.\sim gx. \vee .\sim hx]$$
$$(\exists x)\{\sim[(\exists y)\sim fy.\sim gx].hx\}$$
$$(\exists x)[\sim(\exists y)\sim fy \vee gx.hx]$$
$$(\exists x)[\sim(\exists y)\sim fy.hx. \vee .gx.hx]$$
$$(\exists x)[\sim(\exists y)\sim fy.hx] \vee (\exists x)(gx.hx)$$
$$\sim(\exists y)\sim fy.(\exists x)hx. \vee .(\exists x)(gx.hx)$$

Negando la expresión y borrando las variables:

$$\sim[\sim\exists\sim F.\exists H. \vee .\exists(G.H)] \qquad \sim S$$

Simplificando y canonizando $\sim$S:

$$\sim(\sim\exists\sim F.\exists H).\sim\exists(G.H)$$
$$\exists \sim F \vee \sim\exists H.\sim\exists(G.H)$$
$$\exists\sim F.\sim\exists(G.H). \vee .\sim\exists H.\sim\exists(G.H) \qquad EC(vi)$$

El primer componente, de la forma(v),es consistente pues '$\sim$F' no implica a 'G.H'. Por lo tanto EC y $\sim$S son consistentes y S no es válido.

IV) $(y)[(\exists x)(fx \supset gy). \supset .(z)(\exists x)(fx \supset gz)]$ (*) S

Obteniendo el esquema puro equivalente:

(*) De Copi, Symbolic Logic, p. 105, ej. d.

$$\sim(\exists y)\sim[(\exists x)(fx \supset gy). \supset .\sim(\exists z)\sim(\exists x)(fx \supset gz)]$$
$$\sim(\exists y)[(\exists x)(fx \supset gy).(\exists z)\sim(\exists x)(\sim fx \vee gz)]$$
$$\sim(\exists y)[(\exists x)(\sim fx \vee gy).(\exists z)\sim\{(\exists x)\sim fx \vee gz\}]$$
$$\sim(\exists y)[(\exists x)(\sim fx \vee gy).(\exists z)\{\sim(\exists x)\sim fx.\sim gz\}]$$
$$\sim(\exists y)[(\exists x)\sim fx \vee gy.\sim(\exists x)\sim fx.(\exists z)\sim gz]$$
$$\sim[(\exists y)\{(\exists x)\sim fx \vee gy\}.\sim(\exists x)\sim fx.(\exists z)\sim gz]$$
$$\sim[(\exists x)\sim fx \vee (\exists y)gy.\sim(\exists x)\sim fx.(\exists z)\sim gz]$$

Negando la expresión hallada y borrando las variables:

$$\exists\sim F \vee \exists G.\sim\exists\sim F.\exists\sim G$$

Canonizando:

$$\exists\sim F.\sim\exists\sim F.\exists\sim G. \vee .\exists G.\sim\exists.\sim F.\exists\sim G \qquad \text{EC(vi)}$$

El primer componente, que es de la forma (v), es inconsistente, pues '$\sim F$' implica a '$\sim F \vee \sim G$', pero el segundo, que ostenta la misma forma, no lo es, pues ni 'G' ni '$\sim G$' implican a '$\sim F$'. Por lo tanto $\sim S$ es consistente y S inválido.

V) $$(y)(x)(fx.gy. \supset .fx \vee p) \qquad S$$

Hallando el esquema mixto equivalente:

$$\sim(\exists y)\sim\sim(\exists x)\sim(fx.gy. \supset .fx \vee p)$$
$$\sim(\exists y)(\exists x)[fx.gy.\sim(fx \vee p)]$$
$$\sim(\exists y)(\exists x)(fx.gy.\sim fx.\sim p)$$
$$\sim(\exists y)[(\exists x)(fx.\sim fx).gy.\sim p]$$
$$\sim[(\exists x)(fx.\sim fx).(\exists y)gy.\sim p]$$

Negando S y eliminando '$\exists(F.\sim F)$' :

$$\exists(F.\sim F).\exists G.\sim p$$
$$\perp . \exists G.\sim p$$
$$\perp$$

No es necesario proseguir: $\sim S$ es inconsistente y S válido.

VI) $$(y)[(x)(fx.fy. \supset .gx).p.(x)fx. \supset .gy] \quad (*) \qquad S$$

(*) De Quine, Logic, p. 5.

Hallando la forma mixta equivalente:

$$\sim(\exists y)\sim[\sim(\exists x)\sim(fx.fy. \supset .gx).p.\sim(\exists x)\sim fx. \supset .gy]$$
$$\sim(\exists y)[\sim(\exists x)(fx.fy.\sim gx).p.\sim(\exists x)\sim fx.\sim gy]$$
$$\sim(\exists y)[\sim[(\exists x)(fx.\sim gx).fy].p.\sim(\exists x)\sim fx.\sim gy]$$
$$\sim(\exists y)[\sim(\exists x)(fx.\sim gx) \vee \sim fy.p.\sim(\exists x)\sim fx.\sim gy]$$
$$\sim\{(\exists y)[\sim(\exists x)(fx.\sim gx) \vee \sim fy.\sim gy].p.\sim(\exists x).\sim fx\}$$
$$\sim\{(\exists y)[\sim(\exists x)(fx.\sim gx).\sim gy. \vee .\sim fy.\sim gy].p.\sim(\exists x)\sim fx\}$$
$$\sim\{(\exists y)[\sim(\exists x)(fx.\sim gx).\sim gy] \vee (\exists y)(\sim fy.\sim gy).p.\sim(\exists x)\sim fx\}$$
$$\sim\{[\sim(\exists x)(fx.\sim gx).(\exists y)\sim gy] \vee (\exists y)(\sim fy.\sim gy).p.\sim(\exists x)\sim fx\}$$

Negando la forma mixta obtenida para alcanzar ~S, y borrando las variables:

$$[\sim\exists(F.\sim G).\exists\sim G] \vee \exists(\sim F.\sim G).p.\sim\exists\sim F \qquad \sim S$$

Eliminando 'p' :

$[\sim\exists(F.\sim G).\exists\sim G] \vee \exists(\sim F.\sim G).\top.\sim\exists\sim F$	$[\sim\exists(F.\sim G).\exists\sim G] \vee \exists(\sim F.\sim G).\bot.\sim\exists\sim F$
$[\sim\exists(F.\sim G).\exists\sim G] \vee \exists(\sim F.\sim G).\sim\exists\sim F$	$\bot$

Hallando la forma canónica de la reducida de ~S :

$$\sim\exists(F.\sim G).\exists\sim G.\sim\exists\sim F. \vee .\exists(\sim F.\sim G).\sim\exists\sim F \qquad \text{EC(vi)}$$

El primer componente, que pertenece a la forma(v), es inconsistente, pues '~G' implica a la disyunción 'F.~G. ∨ .~F' y el segundo, de la misma forma, también lo es, ya que '~F.~G' implica a '~F'. Por lo tanto ~S es inconsistente y S válido.

8. Al igual que en los capítulos anteriores se resumen en esta sección las observaciones y comentarios que QM promueve:

a) Si bien, como se dijo a propósito de los procedimientos ya estudiados, las fórmulas con constantes individuales no constituyen propiamente fórmulas para Quine, el análisis de las inferencias en las que intervienen proposiciones singulares hace inevitable su uso. QM, al igual que QS y QL, es incapaz de garantizar decisiones siempre correctas para fórmulas de esta especie.

b) Debe convenirse en que QM es un procedimiento realmente ingenioso que supera, no sólo en elegancia sino también en eficacia práctica, a los otros métodos concebidos por Quine. Incluso su relativa laboriosidad puede aminorar en ciertos casos y el mismo Quine advierte que "para disminuir el trabajo .... puede variar la práctica de varios modos" (Métodos, p. 159), los mismos que describe en seguida, a pesar de los obvios que son. No es entonces por su excesiva operosidad que QM es objetable.

c) Lo más saltante y enfadoso para aquél que trata de adentrarse en las instrucciones que componen QM es la proliferación incesante de alternativas que se van presentando conforme se avanza hacia el final, y a esto se suma que la elección entre ellas obedece a diversos criterios por el hecho de existir metas parciales muy diversas en cada etapa del proceso y aún dentro de cada una de éstas. Es el caso, por ejemplo, de un esquema canónico de la forma (vi), uno de cuyos componentes sea de la forma (iv) y otro de la forma (v): habrá necesidad de construir, para el primero, uno o más <u>condicionales</u> cuya <u>c-validez o c-invalidez</u> ha de establecerse, y para el segundo una <u>conjunción</u> de esquemas de la que se precisa saber, no ya su c-validez o c-invalidez, sino su <u>c-consistencia o c-inconsistencia.</u>

Cuando los esquemas son mixtos o atípicos, la cosa se complica (véase el ejemplo IV de 5, supra), debiendo emplearse inevitablemente técnicas adicionales, y no es poco común llegar a más de un esquema puro. Constituye pues la exuberante frondosidad o "ramificación" de QM su más distintiva característica (e incomodidad).

d) Tantas variaciones y cambios de rumbo en la secuela del proceso, tantas decisiones que tomar ante alternativas de muy diversa especie, todo ello no puede ser considerado sino como el lado débil de QM. Y no es que se confiera indebida preponderancia a razones puramente estéticas: las múltiples y variadas decisiones por tomar y la falta de un enlace orgánico visible entre ellas ofrecen campo singularmente propicio para la desorientación y el extravío del poco experimentado.

e) Desde la transformación inicial de la prueba de validez en otra de consistencia, por lo demás teóricamente irreprochable, se empieza a percibir el aire de afectación y excesiva industria que se advierte luego en las demás fases de QM, con el consiguiente desmedro de su brillantez. Ello no obstante, y pese a los inconvenientes anotados, no del todo veniales, QM es sin disputa el mejor de los procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado que Quine ha publicado, superando con creces a QS y a QL. El hecho mismo y las circunstancias de su concepción pueden significar, entre otras cosas, que su propio autor comparte este sentir.

C O N C L U S I O N

Si se estima que la excelencia de un procedimiento decisorio depende de la sencillez y escaso número de sus reglas, de la módica complicación, nunca más allá de lo razonable, de las operaciones que demanda, y de la naturalidad de la conexión entre sus etapas, que no han de tener otro fin que la obtención paulatina de nuevas estructuras esquemáticas en las que ha de irse haciendo visible, cada vez más claramente, aquélla por medio de la cual se ha de llegar con toda evidencia formal, pero también, quiérase o no, subjetiva, a la decisión buscada, hay que convenir entonces en que los procedimientos para fórmulas predicativas monádicas de primer grado que el Profesor Quine ha inventado y que se han examinado detalladamente en los capítulos anteriores no pueden satisfacer plenamente.

Las soluciones que ofrece, con todo el reconocimiento debido al mérito de su habilidoso autor, y aparte de las concretas y puntualizadas observaciones que se han formulado a cada una de ellas en el lugar respectivo, y que no es preciso repetir aquí, incurren especialmente en una ostensible falta de naturalidad, que también destaca Bertrand Russell a propósito de otros logros de la obra quineana (*). No dan en efecto las reglas de los procedimientos tantas veces mencionados la sensación de someterse a las fórmulas, atentas a las "indicaciones" que de por sí éstas proporcionan, sino, por el contrario, producen el efecto de estarlas "violentando" para extraerles a la fuerza una respuesta. Las secuelas de operaciones que originan no poseen, si se permite el término, la "intuitividad" propia de un proceso que se desenvuelve directa y, por decirlo así, espontáneamente, llevando de la mano al operador en su adelantamiento hacia la meta donde aguarda, pura y límpida, la epifanía final.

(*) Russell, Evolución, p. 80, passim.

Sostiene por tanto esta tesis que, a pesar del plausible progreso que ha significado la aparición de cada uno de ellos con respecto al anterior y del alto grado de aplicabilidad de aquél que aparece expuesto en Methods of Logic, ninguno de los procedimientos decisorios estudiados puede ser considerado como la culminación de la búsqueda del procedimiento decisorio óptimo para fórmulas predicativas monádicas de primer grado. Pero los tres, en conjunto, dejan un saldo que en cierto sentido resulta también positivo: agotan las posibilidades que brinda una ruta entre las varias que pueden utilizarse en dicha pesquisa. Es así como, si ésta ha de proseguir, tendrá con toda seguridad que encaminarse por una vía que no sea la que, prescindiendo de aspectos de detalle, recorren aquellos tres por igual.

A N E X O I

Nota sobre los procedimientos no propiamente decisorios debidos a W.V.O.Quine.

Quine ha ideado, aparte de QS, QL y QM, otros procedimientos mecánicos que si bien no son decisorios en sentido estricto, como el propio autor indica, pueden llegar a serlo en casos especiales(*). Se trata, téngase bien presente, de procedimientos diseñados para su aplicación en el ámbito de lo que el profesor norteamericano denomina "general theory of quantification", esto es, de la Lógica Cuantificacional con predicados n-ádicos ($n \geq 1$).

Uno de ellos es el que aparece en el Apéndice agregado a Methods of Logic en su edición revisada en 1959 (pero que ya había sido incluído, como folleto separado, en la tercera impresión de la primera edición). Allí (**) se describe un procedimiento que "no es más que medio procedimiento decisorio" (+), basado en otro de Herbrand (++), y no es sino eso por no proporcionar "procedimientos generales para mostrar la no validez" (*+). De proporcionarlos, el método sería completamente decisorio(+*).

(*) Debe advertirse que, curiosamente, los dos procedimientos que se describen a continuación llegan a ser efectivamente decisorios para fórmulas monádicas de primer grado, pero en ningún momento Quine afirma algo al respecto. No se los ha estudiado arriba como procedimientos decisorios para dicha clase de fórmulas por cuanto no han sido considerados expresamente como tales por su autor, y, además, por constituir asunto del que se tratará, dentro de un contexto más amplio, en un próximo trabajo.
(**) Métodos, pp. 340-45.
(+) Ibid., p. 260.
(++) Ibid., p. 340.
(*+) Ibid., p. 260.
(+*) "La otra mitad sería un método general que demostrara la no-validez" (Ibid.,p. 261).

Dos procedimientos más (aunque en realidad se trata de uno solo, como se verá), identificados como A y B, son expuestos en el artículo "A Proof Procedure for Quantification Theory" (*). Ambos constituyen, a todas luces, una nueva presentación, sin variar en nada lo esencial, del procedimiento derivado de Herbrand ya mencionado, y como es obvio, tampoco pueden ser considerados algoritmos decisorios. Uno y otro procedimiento se basan en la reducción de la negación de una fórmula cuantificada cualquiera ϕ (**), no necesariamente monádica, a una forma normal prenex equivalente ψ, seguida por la substitución en esta última de las ocurrencias de las variables (una vez suprimidos los cuantificadores en la forma que allí se indica) por elementos de una clase $\mathcal{C}$ de términos denominada "léxico de ψ". Efectuada que ha sido la substitución, se obtiene una "lexical instance" de ψ, pudiendo haber tantas substituciones y por tanto tantas "lexical instances" cuantas permita el léxico de ψ. La fórmula será inconsistente, "i.e., satisfiable in no non-empty universe" (p. 141), si y sólo si se ha llegado a una "truth-functionally inconsistent lexical instance or conjunction of lexical instances", en cuyo caso ϕ será válida.

Este procedimiento, pues B no es sino una "more practical adaptation" de A (loc. cit.), constituiría un "actual decision procedure for inconsistency" siempre que el léxico de ψ fuera finito, pues en ese caso "the number of lexical instances is likewise finite" y se puede así someter "the conjunction of <u>all</u> lexical instances to a truth-table test" (p. 144) (+). Pero ello se logra únicamente cuando todos los cuantificadores existenciales se hallan a la izquierda de la forma prenex correspondiente o no existen cuantificadores universales. De ma-

(*) JSL 20 (1955), pp. 141-49.
(**) De acuerdo al tenor del artículo y a los ejemplos que en él aparecen, ϕ no contiene letras proposicionales.
(+) "Substantially this case of the decision problem was first solved by Bernays and Schönfinkel"(loc. cit.).

nera que, si al construir la forma prenex ψ es posible extraer primero los cuantificadores existenciales, el éxito está asegurado (loc. cit.). Éste es, sin embargo, un caso de excepción, y, como lo hace el propio Quine, no debe vacilarse en reconocer que tanto A como B no son otra <u>cosa, en general,</u> que "medio procedimiento decisorio".

A N E X O II

BIBLIOGRAFIA

(Conviene advertir que sólo se incluyen las obras mencionadas en el cuerpo de la tesis y que no siempre se utilizan arriba el título completo y los complementos bibliográficos de cada una de ellas sino la forma abreviada que se le asigna en esta Bibliografía. En toda referencia a algún pasaje de la tesis, la cifra romana indica el capítulo y la arábiga la sección respectiva de dicho capítulo. Cuando se omite la cifra romana la sección señalada se encuentra en el mismo capítulo. Otras abreviaturas usadas no requieren aclaraciones especiales).

ACKERMANN, Wilhelm: Solvable Cases of the Decision Problem. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1962. (Solvable Cases).

ANDERSON, John M. And JOHNSTONE, Henry W.: Natural Deduction. Belmont, Cal., Wadsworth Publishing Co., 1962.

BEHMANN, Heinrich: Beiträge zur Algbra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. En: Mathematische Annalen, Bd. 86 (1922), pp. 163-229 (Algebra der Logik).

BERNAYS, Paul und SCHONFINKEL, Moses: Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. En: Mathematische Annalen, Bd.99 (1928), pp. 342-372 (Entscheidungsproblem).

BETH, Evert W.: The Foundations of Mathematics. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1959 (Foundations).

CHURCH, Alonzo: A Note on the Entscheidungsproblem. En: JSL 1 (1936), pp. 40-41 (Note).

----:Review of G.H. von Wright's "On the Idea of Logical Truth" and "Form and Content in Logic". En: JSL 15 (1950), pp. 58-59 (Review).

COPI, Irving M.: Symbolic Logic. New York, The Macmillan Co.,1954.

HILBERT, David und ACKERMANN, Wilhelm: Grundzüge der theoretiscehn Logik (Vierte Auflage). Berlin, Springer, 1959 (Grundzüge).

---: Elementos de Lógica Teórica. Madrid, Tecnos, 1962 (Es la versión española, debida a Víctor Sánchez de Zavala, de Grundzüge) (Lógica Teórica).

HILBERT, David und BERNAYS, Paul: Grundlagen der Mathematik. Berlin, Springer, 1934 (Bd.I), 1939 (Bd.II) (Grundlagen).

THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC. Published Quarterly by the Association for Symbolic Logic. Baltimore, Md., 1936 ff. (JSL).

KNEALE, William and Martha: The Development of Logic. Oxford, Clarendon Press, 1962.

QUINE, Willard van Orman: O Sentido da Nova Logica. Sao Paulo, Livraria Martins Editora, 1944 (O Sentido).

---: El Sentido de la Nueva Lógica. Buenos Aires, Nueva Visión, 1958 (Es la traducción castellana de O Sentido, realizada por Mario Bunge). (Sentido).

---: On the Logic of Quantification. En: JSL 10 (1945), pp. 1-12 (Logic).

---: A Proof Procedure for Quantification Theory. En: JSL 20 (1955), pp. 141-149 (Proof Procedure).

---: Mathematical Logic (revised edition). Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1958.

---: Methods of Logic (revised edition). New York, Henry Holt [1959] (Methods).

---: Los Métodos de la Lógica (edición revisada). Barcelona, Ariel, [1962] (Versión castellana de Methods, debida a Manuel Sacristán) (Métodos).

RUSSELL, Bertrand: La Evolución de mi pensamiento filosófico. Versión castellana de Juan Novella Domingo. Madrid, Aguilar, 1960 (Evolución).

STENDER, Richard: Didaktische Themen aus der neueren Mathematik. Heidelberg, Quelle und Meyer, 1962 (Didaktische Themen).