Referencia bibliográfica

Piscoya, L. (1976). *La Lógica Subyacente en el Principio de Inducción Matemática* [Tesis para optar el grado de Doctor en Filosofia]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Letras y Ciencias Humanas. Unidad de Posgrado.

REPOSITORIO DIGITAL DE TESIS DE LA BIBLIOTECA DE LETRAS DE LA UNMSM

Título	La Lógica Subyacente en el Principio de Inducción Matemática
Autor	Luis A. Piscoya Hermoza
Año	1976.
Lugar de publicación	Lima.
Tipo de tesis	Doctorado.
Palabras clave	Lógica; Inducción matemática; Teoría de la prueba; Axiomas; Lógica proposicional; Metateorema.
Referencia en APA 7ma edición	Piscoya, L. (1976). *La Lógica Subyacente en el Principio de Inducción Matemática* [Tesis para optar el grado de Doctor en Filosofía]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Letras y Ciencias Humanas. Unidad de Posgrado.

Resumen

La presente tesis examina la lógica subyacente en el Principio de Inducción Matemática, analizando su rol como regla de inferencia dentro de las demostraciones lógicas y matemáticas. El autor, Luis A. Piscoya Hermoza, explora cómo este principio supera las limitaciones de inferencias tradicionales, como el Modus Ponens, permitiendo generalizaciones esenciales en estructuras infinitas. El trabajo abarca la formalización del principio en sistemas axiomáticos, revisa versiones débiles y fuertes de la inducción, y ofrece ejemplos de su aplicación en la teoría de la prueba. Además, se discuten las diferencias entre este principio y otras reglas lógicas, destacando su importancia para establecer conclusiones universales en el ámbito matemático y filosófico. La tesis concluye que el Principio de Inducción Matemática es fundamental en la estructura de las ciencias formales.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Programa Académico de Filosofía

"La Lógica Subyacente en el Principio de Inducción Matemática"

TESIS

Para optar el grado Académico de Doctor en Filosofía

LUIS A. PISCOYA HERMOZA

LIMA - PERU

1976

RECONOCIMIENTO

Deseo expresar muy especialmente mi agradecimiento al Dr. Francisco Miró Quesada que asesoró esta tesis, me facilito bibliografía y tuvo a bien hacerme sugerencias que impidieron que cometiera al menos un error importante. Asimismo, sin la ayuda de mi hermano Mario, profesor de matemática de esta Universidad, varias demostraciones no hubiera sido posible exponerlas. Es esta ocasión propicia para rendir tributo a la memoria del Dr. Augusto Salazar Bondy, maestro y amigo, pues la lectura del capítulo III de su tesis doctoral _Irrealidad e Idealidad_ ha sido una de las motivaciones de este trabajo.

C A P I T U L O   I

EL PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA Y LA PRUEBA LOGICA .

1.1. Aclaraciones previas

Nos ha parecido pertinente hacer una diserta- ción sobre la lógica subyacente en el Principio de Induc ción Matemática debido a las siguientes razones: 1) en la construcción de importantes demostraciones contenidas en las presentaciones axiomáticas de la lógica se utiliza este principio como regla de inferencia; 2) los traba jos en matemática, que son los que en mayor medida usan este principio, no conceden especial atención a los aspec tos lógicos inherentes a su enunciación y uso; y 3) una comprensión clara del rol que juega dicho principio en la aritmética formalizada y en la metateoría es fundamen tal para lograr una mejor aproximación a los problemas sustantivos planteados por las filosofías dedicadas a la rigorización del conocimiento.

En este trabajo entendemos por lógica subyacen te no sólo los enunciados lógicos cuya validez presupone un determinado principio o teoría. A diferencia de las concepciones usuales, nosotros hemos incluido también co mo aspectos de la lógica subyacente en el Principio de Inducción Matemática, el uso que éste tiene en el desarro llo de los sistemas lógicos, el estatuto que tiene dentro de la aritmética formalizada y las implicancias que tie- nen las diversas interpretaciones que pueden dársele.

Comenzaremos nuestro análisis señalando previa mente que por la expresión "Principio de Inducción" po- dría entenderse al menos tres cosas: a) el nombre de una regla de inferencia o de una conjunción de ellas que co rrespondan a los planteamientos que sobre el tema hicieron Aristóteles, Bacon y Stuart Mill; b) el nombre de un enunciado formulado por Hans Reichenbach dentro de la lógica de la probabilidad; y c) una forma abreviada del nombre "Principio de Inducción Matemática".

La regla o la conjunción de reglas aludidas en primer término, no serían otra cosa que el método inductivo tradicional destinado a derivar proposiciones universales a partir de premisas que son enunciados singulares, esto es, enunciados que sólo contienen predicados, nombres propios y, eventualmente, conectivas proposicionales. Claramente, el método inductivo tradicional consiste, en otros términos, en atribuir una propiedad a todos los elementos de un conjunto de eventos a partir de la información de que algunos eventos de dicho conjunto la tienen. Esta generalización es conocida como no conclusiva en la medida que suponer que la conclusión es falsa no conduce a contradicción.

Sin embargo, aunque una inferencia no conclusiva nos proporciona una conclusión cuya falsedad es posible a pesar de la verdad de las premisas, es cierto que dicha proposición podría constituir la mejor aproximación que podemos lograr en el conocimiento de ciertos eventos en un momento dado. Y es la medida o la determinación del grado de esta aproximación lo que escapó completamente al alcance de la llamada inducción clásica.

Evidentemente la inducción clásica estaba preocupada por inferencias cuyas premisas tenían el carácter de descripciones de fenómenos empíricos observados, para a partir de ellas hacer una afirmación sobre los todavía no observados pero, en principio, observables. Por tanto su campo de aplicación se encontraba dentro de las ciencias empíricas, especialmente las naturales, y este uso, ajeno al dominio de las disciplinas formales, fue supuesto aunque no suficientemente esclarecido.

Hans Reichenbach ha sido uno de los filósofos que se han esforzado por rigorizar la inducción clásica. En su obra <u>The theory of probability</u> propone el conocido "Principio de Inducción" como una regla lógica de inferencia para derivar de modo conclusivo generalizaciones inductivas que estén expresadas dentro del lenguaje del cálculo ordinario de las probabilidades. A este principio es al que hemos hecho alusión en segundo lugar en nuestra distinción inicial y a continuación daremos una noción de él.

Reichenbach asume el concepto estadístico usual de frecuencia relativa que es, en términos del lenguaje natural, el número de veces que aparece un atributo o propiedad en una secuencia de eventos, vale decir, la frecuencia con que ocurre un evento que posee el atributo en cuestión. Sobre la base del concepto anterior se define la probabilidad de un atributo en una secuencia infinita de eventos como el límite matemático de la frecuencia relativa de tal atributo. El "Principio de Inducción" de Reichenbach señala que cuando el límite de la frecuencia relativa de un atributo es calculable, entonces estamos lógicamente autorizados a afirmar que en caso que prolonguemos la secuencia de eventos tanto como se quiera, la frecuencia relativa de dicho atributo no presentará variaciones significativas, pues se mantendrá dentro de un intervalo de valores tan pequeño como se desee.

Si representamos el valor del límite como h^n para una sucesión indefinidamente prolongable, indicando que para el cálculo de dicho límite ha sido suficiente tomar en cuenta un número n de eventos. Y si denominamos h^s a la frecuencia relativa del atributo en cuestión en una prolongación de la secuencia hasta un número s de eventos tal que $s > n$, entonces el "Principio de Inducción" nos permitiría afirmar que se cumplirá necesariamente la siguiente condición:

$$h^n - k \leq h^s \leq h^n + k$$

en la que k representa una cantidad muy pequeña.

Como es comprensible, lo que sentencia Reichenbach con el "Principio de Inducción" es que las inferencias inductivas son conclusivas siempre que sea posible calcular el valor de la probabilidad de un atributo. En consecuencia, se trataría de un principio lógico aplicable sólo a conjuntos o masas de eventos y no a un individuo, que en este caso carece de significación para objetar su validez, pues la existencia de un contraejemplo no conduce a contradicción. Por tanto, este principio, según Reichenbach, constituye la regla de inferencia fundamental en las ciencias empíricas, que de esta manera en sus operaciones de generalización y predicción deberían abandonar la inducción clásica y utilizar las reglas del cálculo de las probabilidades.

A la tercera interpretación de la expresión "Principio de Inducción" dedicaremos la parte siguiente de esta exposición.

1.2. Planteamiento inicial del problema

En matemática es frecuente razonar sobre conjuntos infinitos, que de una manera intuitiva pero no rigurosa son concebidos como sucesiones de elementos que pueden ser prolongadas indefinidamente(*). El ejemplo más conocido es el conjunto de los números naturales o enteros no-negativos que lo intuimos como una sucesión tan larga como se desee. Por necesidad matemática o de otro tipo a menudo es necesario demostrar que una determinada propiedad es poseída por todos los elementos del conjunto de los números naturales y esto no puede hacerse probando que cada elemento del conjunto tiene la propiedad porque este expediente nos llevaría a un procedimiento infinito, que no reuniría las condiciones de una demostración en razón de que no nos permitiría jamás llegar a una conclusión.

La regla de deducción denominada Modus Ponens, que se utiliza frecuentemente en las demostraciones lógicas y matemáticas, resulta insuficiente en este caso. Pues si ocurriera que comprobamos que el primer elemento del conjunto tiene la propiedad P y que de esto se dedu-

----

(*) La definición rigurosa de conjunto infinito debida a Cantor y Dedekind es: un conjunto es infinito si y sólo si existe una correspondencia "uno a uno" entre él y un subconjunto propio de él. (Vid. Hao Wang, Logic, Computers, and Sets, p. 77).

ce que el segundo elemento del conjunto tiene la propiedad P, podríamos por Modus Ponens derivar que el segundo elemento del conjunto tiene la propiedad P, pero para probar lo mismo de los otros elementos necesitaríamos un número infinito de aplicaciones de la mencionada regla de deducción, lo que haría nuestro trabajo interminable. Asimismo no podría ocurrir que de probar que el primer elemento tiene la propiedad P se deduzca que todos sus sucesores la tengan, pues no existe medio lógico para probar que lo que se cumple para un individuo pueda ser generalizado para todos los individuos de un conjunto infinito. La prueba tampoco puede hacerse por inspección de todos los sucesores ya que ellos constituyen un conjunto infinito.

En consecuencia, puesto que a nivel de las estructuras formales, como lo son las lógicas y las matemáticas, se necesita una regla de inferencia que permita efectuar generalizaciones, ésta no puede ser del tipo del Modus Ponens.

Se conoce con el nombre de Principio de Inducción Matemática o quinto postulado de Peano a una proposición que supera las limitaciones del Modus Ponens y permite demostrar de manera incontrovertible que todos los elementos del conjunto infinito de los números naturales o de cualquier conjunto enumerable poseen una cierta propiedad P si se satisfacen ciertas condiciones. De dicho principio se formulan dos versiones conocidas como la enunciación débil y la enunciación fuerte. Esta proposición parece, al menos formalmente, en algún sentido, inductiva, como el principio antes mencionado de Reichenbach, pero se diferencia de éste en que, por ser aplicable a - estructuras lógicas y matemáticas, es tan segura como el Modus Ponens y, por tanto, permite derivar conclusiones mucho más fuertes que las formuladas dentro de un intervalo de valores de probabilidad. En consecuencia, en - los casos en los que se aplica el Principio de Inducción Matemática, cada individuo es relevante y, por tanto, la construcción de un contraejemplo debe conducir a contradicción, lo que asegura que las proposiciones mediante - él demostradas, son universalmente verdaderas en sentido estricto.

En la sección siguiente daremos algunas refe - rencias sobre la enunciación de dicho principio para luego exponer esquemáticamente cada una de las versiones - que hemos distinguido unas líneas antes.

1.3. Breves referencias a la enunciación del Principio de Inducción Matemática .

La formulación del Principio de Inducción Matemática parece muy ligada a los esfuerzos por axiomatizar la aritmética. Así se lo encuentra entre los axiomas de Grassmann(*) contenidos en su libro Lehrbuch der Arithmetik publicado en 1861. Los diez axiomas de dicho autor y sus cuatro definiciones constituyen probablemente el - primer esfuerzo por axiomatizar la aritmética.

El matemático italiano Giuseppe Peano publicó

(*) Según Polya, en Matemática y razonamiento plausible, el primero en conocer el método de la inducción maen 1889 un libro escrito en Latín titulado <u>Arithmetices principia</u> (+) (<u>Los principios de la aritmética</u>). En esta obra se formula como las nociones primitivas, a partir de las cuales es posible definir cualquier otro concepto aritmético o construir cualquier proposición significativa del sistema, las de "número", "uno", "sucesivo" y "es igual a". Inmediatamente se procede a formular nueve axiomas construidos sobre la base de estas nociones primitivas, los mismos que informalmente pueden ser enunciados como sigue:

a1. 1 es un número

a2. Si a es un número entonces a=a

a3. Si a y b son números entonces (a=b)=(b=a)

a4. Si a, b y c son números entonces si a=b y b=c entonces a=c.

a5. Si a=b y b es un número, entonces a es un número.

a6. Si a es un número, entonces su sucesivo también es un número.

a7. Si a y b son números diferentes entonces tienen diferente sucesivo.

a8. Ningún número a tiene como sucesivo al número 1.

a9. Cualquier propiedad que pertenece a 1, y también al sucesor de cualquier número que

----

temática fue Pascal: Esta información la ha tomado de las investigaciones de Freundenthal.

(+) La versión de <u>Arithmeticès principia</u> consultada, es la publicada por van Heijenoort en <u>From Frege to Gödel</u>, (Ed. Harvard University Press, 1967) pp. 83-97.

tiene la propiedad, pertenece a todos los números (interpretación informal).

Los axiomas a2., a3., a4. y a5. están formulados fundamentalmente en base a la noción primitiva de "es igual a" y son por tanto utilizables también en teorías distintas a la aritmética. Por esta razón tales axiomas y la noción primitiva que los constituye son considerados actualmente como pertenecientes a la lógica subyacente del sistema, lo que lleva a tipificar sólo a los cinco axiomas restantes como propiamente aritméticos en el sistema de Peano. Asimismo es importante señalar que al efectuar la explicación del caso, Peano indica que la noción primitiva de "número" es la de entero positivo, o lo que usualmente se denomina número natural, cuando se añade el cero.

Es pertinente señalar que los axiomas aritméticos antes anotados, fueron tomados por Peano del matemático Dedekin, lo que se deduce del texto de la carta que éste dirigió al Dr. Keferstein en febrero de 1890. La carta de Dedekin, publicada en inglés por el profesor Hao Wang (+), muestra claramente como en base a las nociones de conjunto y de aplicación puede definirse el concepto de cadena, que permite a su vez definir el conjunto de los números naturales como un conjunto simplemente infinito. Desde esta definición se derivan de manera sencilla los enunciados convencionalmente conocidos como axiomas de Peano.

(+) Vid. Hao Wang, op. cit. p. 73.

1.4. Enunciación débil del Principio de Inducción Matemática.

La enunciación débil del Principio de Inducción Matemática(+) puede hacerse informalmente de la siguiente manera: "Si un teorema es válido para el número 1 y se demuestra que es verdadero para n+1 siempre que lo sea para n, será verdadero para todos los números enteros." Esta formulación tomada de Henry Poincaré (++) parece algo posterior a la de Peano que fue publicada en 1889. Es interesante anotar que en esta versión no aparece explícito que la segunda condición establecida por el principio tiene la forma de una proposición condicional, en la que el antecedente está constituido por la postulación de que el teorema se cumple para n y el consecuente por la afirmación implicada por dicha postulación, que sentencia que el teorema se cumple para n + 1. Esta implicación lógica está planteada sutilmente en la formulación de Poincaré por la expresión "es verdadero para n + 1 siempre que lo sea para n". Sobre la naturaleza de esta implicación haremos algún comentario más adelante.

Peano en su noveno axioma, que resulta el quinto cuando suprimen los cuatro referentes a la igualdad, formula el Principio de Inducción Matemática, en su versión débil, de una manera que hace explícitos algunos de sus supuestos, valiéndose -

---

(+) En esta sección todas nuestras alusiones serán a la versión débil de este principio, salvo que se anote alguna otra especificación.

(++) Citado por A. Salazar en Irrealidad e Idealidad p. 109.

para ello de la fuerte capacidad expresiva que le brinda el uso del lenguaje de la lógica proposicional y de la lógica de las clases. Nosotros luego haremos una interpretación algo menos informal de la versión de Peano cuya característica más relevante será introducir la noción de propiedad en lugar de la de clase. Asimismo usaremos el operador condicional en el sentido que ordinariamente se usa en la lógica actual, lo que ciertamente introduce una variante en la medida que Peano no definió el condicional en términos de valores de verdad sino intuitivamente, en términos de "desde a se deduce b", lo que explica algunas imperfecciones en el aparato deductivo de su sistema, como lo señala van Heijenoort en la parte correspondiente de <u>From Frege to Gödel</u>. Entre estas imperfecciones la mayor es la ausencia de una regla de inferencia que permita separar el antecedente del consecuente, lo que obliga al lector a legitimar intuitivamente los pasos de la demostración que aparece como una lista de fórmulas independientes a quien se rige estrictamente por las reglas del sistema. Esto revela indudablemente que la formalización de la aritmética propuesta por Peano era incompleta.

La interpretación que damos al enunciado conocido como el quinto postulado de Peano es la siguiente:

Supongamos que para los objetos del universo del discurso existe una propiedad P(x) tal que los dos siguientes enunciados son verdaderos:

1. P(1) (1 tiene la propiedad P)

..

* 2. Para cualquier número entero positivo x/
Si P(x) entonces P(x+1) (Si x tiene la propiedad P, entonces la tiene el número x+1)

---

3. Para todo x, es verdad P(x)

Es pertinente anotar, antes de seguir adelante, que en las presentaciones que usualmente se hacen del Principio de Inducción Matemática puede apreciarse variaciones respecto a la elección del primer número al que es aplicable. Algunos autores comienzan señalando que la primera condición debe cumplirse para el número 1 y otros que debe ser satisfecha por el número 0. Aunque una u otra opción no altera fundamentalmente los resultados, parecería que debido a que el referido principio es aplicable a demostraciones en conjuntos distintos al de los números naturales pero coordinables biyectivamente con él, es más cómodo suponer por ahora que el primer número natural es el 1, como podrá apreciarse en la demostración que ofreceremos como segundo ejemplo. En dicha demostración se aplica el principio de Inducción Matemática sobre el conjunto enumerable de las longitudes de las fórmulas bien formadas de un sistema lógico dado, estableciéndose que la longitud

---

* La notación "x+1" para designar al sucesor de x es muy informal, pues presupone que previamente se haya definido la operación de adición y, en una exposición rigurosa, la función sucesor es, contraviniendo la intuición inmediata, previa a la definición de la suma, como veremos posteriormente. El uso de "x+1" para sucesor se justifica aquí por su intuitividad, pero provisio

mínima de una fórmula es igual a 1.

Examinando ahora la versión que hemos dado del llamado quinto postulado de Peano, encontramos que se comporta como una regla de inferencia que nos permite derivar desde la verdad de las proposiciones designadas por 1. y 2. la verdad de la proposición designada por 3. El esquema puede ser expresado como sigue:

"Si es verdad 1. y es verdad 2. entonces es verdad 3."

Consecuentemente para efectuar demostraciones utilizando esta regla es necesario probar, en cada caso, la verdad de cada una de las condiciones 1. y 2., para luego al amparo del Principio de Inducción Matemática inferir la verdad de la proposición 3. Probar la verdad de la condición 1. usualmente es muy sencillo. Normalmente la tarea más laboriosa en una demostración de este tipo es probar la verdad de la condición 2. que tiene la forma de un condicional con el antecedente verdadero por postulación, lo que exige necesariamente probar la verdad del consecuente para que el condicional como un todo sea verdadero y se satisfaga la condición. Esta peculiar estructura de la condición 2. hace posible que para probar su verdad sea aplicable la regla lógica de la prueba condicional que autoriza a tomar como premisa el antecedente para derivar el consecuente y, luego, afirmar la verdad de todo el condicional independientemente de la premisa usada. A manera de ejemplo demostraremos por inducción débil que para cualquier entero n la suma de la sucesión

---

nalmente.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \text{ es igual a } \frac{n(n+1)}{2}.$$

A fin de precisar el funcionamiento de la demostración y de ganar claridad, la dividiremos en tres partes: a) la primera, I, para probar la verdad de la condición 1.; b) la segunda, II, para probar la verdad del condicional de 2.; c) la tercera, III, en la que simplemente se realiza la llamada generalización inductiva.

I. La igualdad:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

es verdadera para n = 1, pues en este caso el miembro izquierdo de la igualdad es igual a 1 y el derecho también.

II. Como el condicional que debe probarse como segundo paso debe ser válido para cualquier número n, elegido arbitrariamente, entonces la variable n puede ser cuantificada universalmente sin ninguna dificultad. Por tanto debemos probar la verdad de la siguiente proposición:

$$(\forall n)\left(1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1))}{2}\right)$$

Aplicando la regla lógica de la prueba condicional la demostración se desarrolla como sigue:

L_1. $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ Premisa para P.C.

L_2. $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

L_3. $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$

L_4. $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)\ (n+2)}{2}$

L_5. $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

L_6. $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

El paso L_6 se justifica por P.C. en 1, 5.

L_7. $(\forall n)\left(1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)$

El paso L_7. se justifica por G.U. en 6.

III. La tercera parte de la demostración tiene la función de generalizar que todo número n tiene la propiedad que, se ha demostrado, satisface las condiciones 1. y 2.

$$(\forall n)\left(1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Evidentemente, en la demostración realizada se asumen como premisas, además de la línea L_1., las proposiciones del sistema de la aritmética, que establecen las propiedades más conocidas de los enteros tales como la asociatividad de la adición, etc. La manera explícita como funcionan estas premisas no ha sido expresada, pero puede afirmarse que se comportan como tales en la medida que su validez ha sido presupuesta. Aunque los matemáticos normalmente no hacen explícito el uso del condicional, de los cuantificadores ni de la regla de deducción de P.C., el hecho de que nosotros no hayamos obviado estos conceptos no significa todavía un análisis de la lógica subyacente en la aplicación del Principio de Inducción Matemática.

1.5. Enunciación fuerte del Principio de Inducción Matemática.

Se conoce con el nombre de versión fuerte del Principio de Inducción Matemática a una formulación que incluye una variante en la segunda condición establecida para derivar la llamada generalización inductiva.

Mientras que en la condición 2. de la versión anterior, desde la suposición de que un número arbitrariamente elegido tiene la propiedad P, se trata de probar que su sucesivo también la tiene, en este caso el presupuesto parece ser más exigente, pues de la postulación de que todos los elementos menores que cualquier número n tienen la propiedad P , debe probarse que también n tiene la propiedad P .

La formulación del Principio de Inducción Fuerte es como sigue:

1. $P(1)$
2. Para cualquier n arbitrario, si $P(k)$ para cualquier $k < n$, entonces $P(n)$

---

3. Por tanto, para todo n, $P(n)$ (*)

Esta enunciación también asume, como la anterior, la existencia de una propiedad $P(x)$ para los individuos -

---

(*) Tomado de Irving Copi; Symbolic Logic, tercera edición, p.209. La versión fuerte no es independiente de la débil en tanto es demostrable usando como regla de inferencia a esta última. En la sección 2.3. se proporcio del universo del discurso, que satisfaga las condiciones 1. y 2. Es interesante anotar de otra parte, que esta segunda versión goza de la preferencia de algunos autores conocidos que la utilizan, por ejemplo, para la demostración del conocido teorema de la deducción. Al respecto pueda verse las partes correspondientes de los libros <u>Symbolic Logic</u>, <u>Introduction to Mathematical Logic</u> y <u>Mathematical Logic</u> de Copi, Mendelson y Kleene respectivamente.

Asimismo, de usarse cuantificadores en la formulación anterior, entonces ocurre que tanto n como k son variables que deben ser cuantificadas universalmente, pues la cuantificación existencial de n conduciría al error de afirmar la existencia del mayor número natural.

Ejemplificaremos con una demostración muy sencilla el uso del Principio de Inducción Matemática, versión fuerte. Probaremos, siguiendo a Copi en lo fundamental, que un sistema lógico que contiene los signos proposicionales P,Q,R,S,..... y solamente los operadores de disyunción " v " y conjunción "." es funcionalmente incompleto en el sentido que no puede expresarse en él la función de verdad conocida como la negación conjunta (*) u operador "daga", que asume el valor verdadero cuando todos sus argumentos asumen el valor falso.

---

na una demostración formal del Principio de Inducción fuerte al que más propiamente se le llama Principio de Inducción completa.

(*) El nombre de negación conjunta es usado por Quine en su libro <u>Lógica Matemática</u> (Rev. de Occidente, 1972, p. 63.). Este operador y el de incompatibilidad serían debidos a H.M. Sheffer (Puede verse la versión dada por Whi-

Con el objeto de establecer correspondencia entre el conjunto de fórmulas del sistema dado y el conjunto de los números naturales, definiremos el concepto de longitud de una fórmula, lo que no hace Copi explícitamente en <u>Symbolic Logic</u>, p. 210.

Longitud de una fórmula F = Df. Es el número n de signos de que consta F sin contar los paréntesis y contabilizando cada ocurrencia de P,Q,R,S,..... "v" y "." como un signo distinto. Por ejemplo la longitud de "P v P" es igual a 3.

En lo que sigue desarrollamos la demostración.

I. Probaremos que una fórmula de longitud igual a 1 no puede ser verdadera si sus componentes son falsos.

Cuando una fórmula g(P,Q,R,....) tiene longitud igual a 1 tiene solamente un signo y éste necesariamente debe ser solamente una letra proposicional P, o Q, o R,o... pues de otro modo no sería una fórmula bien formada. En tanto que los argumentos P,Q,R,... han sido postulados todos como falsos, desde esta premisa g(P,Q,R...) no puede ser una fórmula verdadera desde que es necesariamente igual a uno de sus argumentos. Por tanto hemos satisfe-

----

tehead y Russell en la Introducción a la segunda edición de <u>Principia Mathematica</u> (1927)). Posteriormente Nicod (1916), usando sólo el operador de incompatibilidad, desarrolló la lógica proposicional. León Post (1921) aprovechó los resultados de Nicod y también trabajó el operador de incompatibilidad. Este operador fue generalizado a la lógica de predicados por Moses Schöfinkel mediante la función U en un trabajo que presentó en 1920 a la Sociedad Matemática de Göttingen.

cho la primera condición al demostrar que una fórmula de longitud igual a 1 tiene la propiedad de no ser verdadera cuando todos sus componentes son falsos.

II. Para probar la condición 2. asumiremos que cualquier fórmula bien formada que tiene una longitud menor que n no tiene el valor verdadero cuando todos sus argumentos son falsos. Desde esta postulación demostraremos que cualquier fórmula bien formada que tenga una longitud igual a n no puede tener valor verdadero cuando todos sus componentes son falsos.

Examinemos una fórmula bien formada arbitrariamente tomada como $g(P,Q,R,\ldots)$ la que tiene longitud n y $n > 1$. Como es una fórmula bien formada entonces debe tener una de las dos formas siguientes:

f_1. $g_1(P,Q,R,\ldots.) \cdot g_2(P,Q,R,\ldots)$

f_2. $g_1(P,Q,R,\ldots.) \vee g_2(P,Q,R,\ldots)$

donde $g_1(P,Q,R,\ldots)$ y $g_2(P,Q,R,\ldots)$ son fórmulas bien formadas que tienen una longitud menor que n. Por tanto, de conformidad con la postulación hecha anteriormente, cada una de dichas fórmulas es falsa cuando sus respectivos argumentos $P,Q,R,\ldots$ son todos falsos. Consecuentemente, dadas dos fórmulas cada una de las cuales es falsa, tanto la conjunción como la disyunción que con ellas se construyan también serán falsas. Por consiguiente, cualquier fórmula $g(P,Q,R,\ldots)$ de longitud n, donde n ha sido tomado arbitrariamente, tiene el valor falso en este caso.

III. De esta manera hemos probado en los parágrafos I. y II. que las condiciones 1. y 2. son verdaderas ; luego, apoyándonos en el Principio de Inducción Matemática, versión fuerte, podemos afirmar que toda fórmula bien formada del sistema que contiene los signos P, Q, R, "v" y "." tiene la propiedad de no ser verdadera cuando sus argumentos son falsos. Es decir que en dicho sistema no se puede expresar la función de negación conjunta y, consecuentemente, no es funcionalmente completo.

1.6. Necesidad del uso del Principio de Inducción Matemática en las demostraciones lógicas.

El Principio de Inducción Matemática, ya sea en su versión débil o en su versión fuerte, resulta de particular interés teórico, debido a que sólo en los niveles muy elementales de la lógica se puede prescindir de su empleo. Sin embargo, cuando se desea dejar el nivel intuitivo y se precisa dar una demostración aun de algunas propiedades muy conocidas, entonces las usuales reglas lógicas, como el Modus Ponens, resultan completamente insuficientes para legitimar una prueba.

Por citar sólo un ejemplo, tomado de la lógica proposicional, anotaremos que sería muy difícil dar una prueba no inductiva para la conocida tautología de De Morgan generalizada a fórmulas de una longitud n arbitrariamente elegida.

En cambio, aplicando el Principio de Inducción Matemática, resulta sencillo probar la validez para todo n, de la siguiente fórmula:

$$\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \ldots \vee \bar{A}_n \equiv \overline{A_1 . A_2 . \ldots . A_n}$$

Para desarrollar la demostración es suficiente aplicar el mencionado principio sobre el número de argumentos de la fórmula o también sobre le número de ocurrencias del operador "v" de disyunción. El componente derecho puede ser interpretado fácilmente como la propiedad que, por una tabla sencilla, sabemos que satisface la condición 1. y, luego, mediante un razonamiento simple, se puede probar que dicha propiedad es poseída por el consecuente de la condición 2., asumida que la posee el antecedente.

De otra parte, en las presentaciones axiomáticas de la lógica, encontramos que existe un metateorema que es utilizado, en lo que podría llamarse las axiomatizaciones clásicas, como una poderosa regla de inferencia. Estamos aludiendo al Teorema de la deducción, cuya demostración inicial es comunmente atribuida a Herbrand en su trabajo titulado "Investigaciones en teoría de la prueba: las propiedades de las proposiciones verdaderas", publicado en 1930. La prueba que se da para este teorema, a nivel de la lógica proposicional o de una teoría de primer orden, presupone la validez del Principio de Inducción - Matemática, prefiriéndo frecuentemente los autores el uso de la llamada versión fuerte.

Por otro lado prescindir de la inducción matemática en la demostración del Teorema de la deducción, no es una posibilidad que se muestre clara, pues en la medida que en las presentaciones axiomáticas generalmente sólo se usa como regla de deducción el Modus Ponens, resulta comprensible que con esta regla no se tiene un instrumento suficiente para probar un metateorema que es válido para toda demostración que conste de cualquier número n de líneas, pues las sucesivas aplicaciones del Modus Ponens no garantizan la generalidad en este caso deseada y, de ser efectuadas, nos conducirían a un proceso indefinidamente prolongable que no reuniría los requisitos de una prueba conclusiva.

Por ser particularmente relevante para nuestros planteamientos, presentaremos a continuación una prueba del Teorema de la deducción para el cálculo proposicional clásico, la misma que ha sido desarrollada por Elliot Mendelson, en su libro Introduction to Mathematical Logic, como la proposición 1.8. Hemos decidido seguir a Mendelson debido a que la comprensión de la demostración que formula sólo demanda de tres axiomas, del Modus Ponens, del teorema de la identidad y, evidentemente, del Principio de Inducción Matemática. En cambio Kleene y Copi, en sus libros antes citados, desarrollan 10 y 16 teoremas, respectivamente, antes de dar una prueba para el mencionado resultado. En algunos manuales introductorios se presentan pruebas que, por no ser rigurosas, no las hemos considerado. Los axiomas a utilizarse en la demostración son las fórmulas siguientes:

A1. $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

A2. $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

A3. $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B))$ (*)

(*) Cabe anotar que el sistema de axiomas dado por Mendelson para la lógica proposicional es más simple que el de Russell y Whitehead y que las presentaciones usuales del Hilbert Bernays y del Hilbert Ackermann. Sistemas de tres axiomas son también el de J. Robbin, el de Rosser y el de Lukasievicz. Este último parece haber sido el primero en usar un sistema de sólo tres

La regla lógica de demostración es el <u>Modus Ponens</u>, como ya lo indicáramos antes, y el teorema de la identidad es la fórmula $\vdash A \rightarrow A$.

Como paso previo es conveniente formular una definición precisa de prueba de A desde un conjunto de fórmulas bien formadas Γ, que son denominadas las premisas de la prueba. La expresión $\Gamma \vdash A$ se lee "prueba de A desde Γ".

Definición de "prueba de A desde Γ" ($\Gamma \vdash A$). Es una secuencia de líneas $A_1, \ldots, A_n$, tal que $A = A_n$ y para cada i, o A_i es un axioma, o A_i pertenece a Γ, o A_i es una consecuencia directa, obtenida por alguna regla de derivación (en este caso el <u>Modus Ponens</u>), de líneas precedentes de la secuencia.

<u>Enunciado del Teorema de la Deducción</u>.- Si Γ es un conjunto de fórmulas bien formadas (fbfs) y A y B son fbfs, y $\Gamma, A \vdash B$, luego $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

La demostración de esta proposición es como sigue:

I. Sea $B_1 \ldots, B_n$ una prueba de B desde $\Gamma \cup \{A\}$, en la que $B_n = B$. En esta etapa de la demostración probaremos que el enunciado del teorema se cumple para $i = 1$, esto es, que la afirmación $\Gamma \vdash A \rightarrow B_1$ es lógicamente deducible desde la postulación formulada en el teorema y desde los axiomas. Por definición de prueba, B_1 sólo puede estar en alguna de las tres siguientes condiciones y

---

axiomas para el cálculo proposicional, en 1929, según lo señala en su libro <u>Aristotle's Syllogistic</u>, p. 80.

todas ellas conducen al establecimiento de $\Gamma \vdash A \rightarrow B_1$.

Condición a) B_1 puede ser miembro de Γ; Condición b) B_1 puede ser un axioma; Condición c) B_1 puede ser A. Como en virtud del axioma A1. $(B_1 \rightarrow (A \rightarrow B_1))$ es también un axioma, por tanto, para los casos a) y b) se puede aplicar Modus Ponens mediante la afirmación de B_1 lo que permite el establecimiento de $\Gamma \vdash A \rightarrow B_1$. En el caso c), cuando B_1 es A, ocurre que $\vdash A \rightarrow B_1$ es un teorema debido a que $\vdash A \rightarrow A$ es un teorema previamente demostrado, y, por tanto, se cumple $\Gamma \vdash A \rightarrow B_1$.

II. Probaremos ahora que para nuestro metateorema, la condición 2. de la versión fuerte del Principio de Inducción Matemática se cumple. Para ello asumiremos que se cumple $\Gamma \vdash A \rightarrow B_k$ para todo k menor que cualquier i arbitrariamente elegido. Desde esta postulación probaremos que es verdad $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$. Por definición de prueba se plantean cuatro condiciones posibles para B_i: a) B_i es un axioma; b) B_i está en Γ; c) B_i es A; y d) B_i se sigue por M.P. desde B_j y B_n de tal manera que el subíndice j es menor que i, el subíndice n es menor que i y la fórmula B_n es de la forma $B_j \rightarrow B_i$. En los tres primeros casos, como en la primera parte de la demostración, por axioma A1., Modus Ponens y Teorema de la identidad, es legítima la afirmación de $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$.

En el caso d), en tanto que hemos asumido que el teorema se cumple para todo k menor que i, entonces podemos afirmar la validez de $\Gamma \vdash A \rightarrow B_j$ y de $\Gamma \vdash A \rightarrow (B_j \rightarrow B_i)$ (donde $B_j \rightarrow B_i$ es la fórmula B_n), pues ya hemos asumido $j < i$ y $n < i$. Consecuentemente, por axioma A2. establecemos $\vdash (A \rightarrow (B_j \rightarrow B_i)) \rightarrow ((A \rightarrow B_j) \rightarrow (A \rightarrow B_i))$, y desde estas fórmulas, mediante dos aplicaciones del Modus Ponens, podemos afirmar: $\vdash A \rightarrow B_i$.

III. Habiendo probado que se satisfacen las condiciones 1. y 2., el próximo paso es generalizar el teorema para todo i y, por tanto, como i = n, para todo n, esto es, para pruebas de cualquier número de líneas.

Es pertinente señalar que la prueba antes desarrollada, además de rigurosa, es breve y bastante más accesible al lector no especializado que otras presentaciones. En español puede verse la demostración generalizada de este teorema en el libro de M. Sacristán Introducción a la Lógica y al análisis formal, pp. 163 - 172. Sin embargo, la exposición de dicho autor, hecha desde los axiomas del sistema Hilbert Bernays, es varias veces más larga que la elegida para este trabajo.

La demostración del metateorema anterior tiene especial interés teórico debido a que demanda la utilización del Principio de Inducción Matemática como una regla de inferencia que no aparece explícita en los lenguajes lógicos en los cuales se lo demuestra. Si consideramos que tal vez la característica fundamental de la lógica contemporánea es la pretensión de realizar derivaciones de acuerdo a reglas definidas y explícitas, entonces resulta sorprendente que en las presentaciones axiomáticas de la lógica se asuma, sin mostrar mayor interés en dar justificación alguna, la validez del mencionado principio como si se tratara de una regla de deducción muy especial y, ciertamente, lo suficientemente evidente como para tomarse la molestia de hacerla explícita.

El afirmar que el Principio de Inducción Matemática no se enuncia expresamente en las axiomatizaciones convencionales por que se lo emplea para demostrar metateoremas que, como tales, no pertenecen al sistema presentado, no sería una justificación satisfactoria, puesto que usualmente también es necesario definir explícitamente las propiedades metalingüísticas. Asimismo, la presencia de teoremas como la equivalencia de De Morgan, antes señalada, dentro de un cálculo, está expresando la necesidad de asumir dicho principio como una regla de inferencia a nivel del lenguaje objeto.

Además el estatuto del Principio de Inducción Matemática en las presentaciones axiomáticas no es semejante al del Modus Ponens, pues esta última regla no necesita ser justificada intuitivamente debido a que puede expresársela fácilmente mediante una tautología, y, por este medio, probarse que se trata de una regla de deducción respecto a la cual la propiedad de ser verdadero es hereditaria. En cambio el principio mencionado no tiene la forma de una tautología y, por añadidura, hay un serio inconveniente que impide expresarlo mediante una tautología. Este está dado por el hecho de que la generalización inductiva es expresada por una fórmula cuantificada universalmente la misma que no es definible, en general, por una función de verdad de enunciados singulares, que tiene la limitación de presuponer un universo finito, lo cual transgrede el sentido fundamental del Principio de Inducción Matemática.

De otra parte, la presencia del quinto postulado en las pruebas lógicas no sólo plantea la cuestión re lacionada con su legitimidad sino también la referente a la insuficiencia de las reglas de deducción, tradicionalmente lógicas, para la derivación de todas las consecuencias que se derivan de los axiomas. Los tratadistas generalmente no consideran al Principio de Inducción Matemática como una regla de inferencia de tipo lógico sino que admiten sin discusión su carácter matemático irreductible. Esta es la razón que está implícita en la universal aceptación de la reducción de los axiomas de Peano de nueve a cinco (*), que supone que sólo los cuatro axiomas referentes a la identidad no son aritméticos y pertenecen, por tanto, a la lógica subyacente del sistema. De esta manera se instituye el Principio de Inducción Matemática en una proposición estrictamente privativa de una teoría aritmética o aritmetizable. En consecuencia, una formalización de la aritmética, desde esta perspectiva, debe incluir entre sus axiomas extralógicos al principio materia de esta discusión.

Asimismo, si es cierto que en una axiomatización lógica se puede prescindir del Teorema de la deducción con la sóla condición de que no se permitan pruebas desde hipótesis o premisas, también lo es que esta limitación empobrecería mucho el uso del método axiomático, lo que sería pagar un precio muy caro por prescindir del uso de la inducción matemática . Por otra parte, este recurso no evitaría la interesante limitación planteada por el hecho de no poder instaurar el mismo Teorema de la deducción por métodos convencionalmente lógicos.

(*) En el capítulo III veremos que esta reducción puede ser aún mayor si se formaliza la aritmética dentro de la teoría de los conjuntos.

C A P I T U L O   II

MODUS PONENS Y PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA

2.1 El Modus Ponens como condición necesaria en las pruebas por inducción.

En las secciones precedentes hemos hecho alusión al Modus Ponens asumiendo en cierto modo que es la regla de inferencia que mejor da cuenta de los usuales procesos deductivos que se realizan en el campo de la Lógica. Ciertamente un argumento de hecho para justificar nuestro proceder puede estar dado por la constatación de que los sistemas lógicos más conocidos utilizan al Modus Ponens como única regla primitiva de inferencia. Asimismo la solvencia de tales sistemas no se reduce a ser conocidos sino que son tales en la medida que satisfacen de manera probada importantes propiedades metateóricas y por esta razón se recurre a menudo a ellos para convalidar demostraciones. Así, por ejemplo, Hao Wang para probar que un sistema lógico S es completo, en su trabajo Some formal details on predicative set theories *, prueba que S es equivalente a un sistema S' del tipo Hilbert-Bernays, cuya compleción es conocida, y, de esta manera, establece la prueba.

Específicamente, consideramos sistemas conocidos, el de Whitehead y Russell contenido en la obra Principia Mathematica , el Hilbert-Bernays, el Hilbert-Ackermann, el de Rosser, el de Luckasievicz, etc. El hecho de que estos sistemas utilicen el Modus Ponens como única regla primitiva de inferencia puede ser constatado en el caso del de Whitehead y Russell revisando el primer -

---

(*) Este trabajo esta contenido en Logic, Computers and Sets, pg. 585.

volúmen de Pincipia Mathematica (p.94). En el caso del sistema Hilbert-Bernays puede recurrirse a la presentación hecha por Manuel Sacristán en Introducción a la lógica y el análisis formal, (p. 110). La presentación de Sacristán ha sido tomada de los Grundzüge der theoretischen Logik. Del Hilbert-Ackermann hay traducción al español. También para este sistema y para el de Rosser puede consultarse la excelente presentación hecha por Copi en Symbolic Logic p. 201 y ss. El sistema de Lukasiewicz aludido es el presentado por este autor en su obra Aristotle's Syllogistic p. 80 y ss. Es pertinente aclarar que estamos considerando al Modus Ponens como única regla primitiva de inferencia en el sentido que es la única que permite realizar la operación de separación, consistente en independizar el consecuente de una implicación de su respectivo antecedente.

Sin embargo puede darse una razón de carácter teórico para mencionar a la referida regla reiteradamente en una disertación sobre el Principio de Inducción Matemática. Esta es que puede argumentarse que si bien es cierto que ella es insuficiente en sí misma para garantizar pruebas que pueden establecerse por inducción, sin embargo forma parte de la lógica subyacente, implícita, en el principio en discusión. Una concepción de este tipo se encuentra en el trabajo de Henri Poincaré titulado Naturaleza del razonamiento matemático. * . Se-

---

(*) Publicado en la selección de ensayos de Poincaré, Filosofía de la Ciencia (UNAM, México, 1964) pp. 217-233. Antes fue publicado en La ciencia y la hipótesis.

gún este notable matemático francés, el Principio de Inducción Matemática no es otra cosa que una fórmula que condensa una infinidad de inferencias del tipo siguiente:

El teorema es cierto para el número 1
Luego, si es cierto para 1, es cierto para 2
Entonces es cierto para 2
Luego, si es cierto para 2, es cierto para 3
Entonces es cierto para 3, y así sucesivamente.

Poincaré denomina a esto una cadena de silogismo hipotéticos, sin embargo, como es claro, se trata más bien de una cadena de aplicaciones de lo que los lógicos llaman universalmente regla del Modus Ponens. El silogismo hipotético ordinario, que no es otra cosa que la expresión de la propiedad transitiva para el condicional, sólo nos autorizaría a establecer que el primer antecedente implica el último consecuente pero no nos permitiría afirmar categóricamente qu el teorema se cumple para los números 2,3,....,n, (n+1) ...., a menos que apliquemos el Modus Ponens como regla de separación.

En el planteamiento anterior parece que de alguna manera se está suponiendo la posibilidad de definir el cuantificador universal en los siguientes terminos:

$$\text{Df. 1.}\ (\forall x)\ Px \equiv Pa_1, Pa_2, Pa_3, \ldots\ldots\ldots$$

En la definición Df. 1 debe asumirse, de conformidad con la idea de Poincaré, que el componente derecho de la equivalencia es un conjunto de infinitos elementos Pa_i obtenidos cada uno de ellos por Modus Ponens. Pero pa ra que la definición sea correcta no es suficiente que cada proposición Pa_i sea verdadera sino que todas juntas constituyan una proposición verdadera, la misma que no podría ser otra cosa que una hipotética conjunción de infinitos componentes. Sin embargo no es posible definir la operación de conjunción para infinitos componentes debido a que nunca obtendríamos el valor de la pretendida proposición compuesta. No hay conjunciones infinitas aunque, evidentemente, se admiten infinitas conjunciones finitas.

Poincaré era consciente de la limitación antes señalada, aunque en el ensayo citado no proporciona mayor detalle. La solución que propone es que la equivalencia discutida es posible en el espíritu por una operación de síntesis muy especial, que se impone a nuestra razón. De esta manera considera al Principio de Inducción Matemática un ejemplo típico de juicio sintético a priori que expresa lo que es el razonamiento matemático por excelencia (*).

Empero, sin identificarnos con el apriorismo de Poincaré, nos parece que en lo fundamental es defendible la tesis de que el Modus Ponens es parte de la Lógica subyacente en las demostraciones por inducción matemá

(*) Russell, en Introducción a la Filosofía Matemática p. 47., objeta la tesis de Poincaré. En la sección 3.2 discutiremos este problema. Sin embargo es importante señalar que la concepción de Poincaré del Principio de Inducción Matemática como juicio sintético a priori demuestra claramente que este matemático estuvo lejos del convencionalismo radical que usualmente se le atribuye.

tica, en el sentido de que la validez de dicha regla está presupuesta necesariamente en la construcción de este tipo de pruebas. Nuestro argumento sobre este asunto evitará, al menos por ahora, cualquier complicación ligada a conjuntos infinitos.

Si formalizamos el Principio de Inducción Matemática de la manera usual, entonces tenemos:

$$"P(1) \,.\, (\forall x)\,(P(x) \longrightarrow P(x+1))) \longrightarrow (\forall y)\,P(y)"$$

Claramente en este caso ningún matemático invocaría que un condicional con el antecedente falso es verdadero porque de hacerlo eliminaría la posibilidad de obtener una conclusión por separación del consecuente. Por tanto, toda demostración matemática por inducción, asume la validez de la fórmula anterior y luego procede, de acuerdo a la naturaleza del caso particular, a probar que el teorema específico satisface las condiciones $P(1)$ y $(\forall x)\,(P(x) \longrightarrow P(x+1))$. A continuación se deriva la validez del teorema a demostrarse mediante la denominada generalización inductiva que consiste en la afirmación de $(\forall y)\,P(y)$, lo cual sólo es posible si se supone una aplicación de la regla del <u>Modus Ponens.</u> Como paso intermedio una aplicación de la regla de ejemplificación universal es necesaria para que el antecedente de la fórmula del principio en estudio pueda coincidir con las características que en un caso particular tenga $(P(x) \longrightarrow P(x+1))$. Lo que hace posible la restitución del cuantificador universal es el empleo de la regla de la prueba condicional o del Teorema de la Deducción, según sea el caso. En la práctica no es necesario hacer explícito el proceso descrito, pero, en razón de nuestros fines, esto ha sido necesario para poner en claro que toda demostración inductiva demanda que se pruebe la verdad del antecedente del principio mencionado, para concluir la de su consecuente.

La argumentación anterior es suficiente para probar que la utilización del llamado quinto postulado de Peano presupone la validez del Modus Ponens como una regla de inferencia con respecto a la cual la propiedad de ser un enunciado verdadero es hereditario. Este resultado nos permite sostener que el Modus Ponens es condición necesaria para la aplicación del Principio de Inducción Matemática y que éste, a su vez, es condición suficiente para asegurar que el Modus Ponens ha sido utilizado. Asimismo, en la medida que las condiciones necesarias de una formulación no son otra cosa que los presupuestos para su validez, esto es, su lógica subyacente, luego podemos aseverar que en este sentido la regla de inferencia de separación, antes aludida, forma parte de la lógica subyacente en toda demostración matemática por inducción.

2.2. La cuestión planteada por las lógicas que prescinden del Modus Ponens (Los sistemas de Nicod y de Herbrand)

Pueden hacerse al menos dos observaciones al planteamiento antes desarrollado. La primera sería el señalar que es una cuestión de hecho que se han construido sistemas lógicos satisfactorios como el de M. Jean Nicod que utiliza una regla de inferencia distinta a la aquí postulada, y, consecuentemente, podría sostenerse que si se usara dicho sistema en la formalización de la aritmética, no sería necesario presuponer el Modus Ponens. La segunda podría ser tomada de una de las consecuencias más interesantes del llamado teorema fundamental de Herbrand que implica que el Modus Ponens es omitible en la teoría de la cuantificación, la qu puede construirse utilizando las llamadas "reglas del pasaje", las dos reglas de generalización y la regla generalizada de simplificación. La corrección de estos resultados con sus respectivas limitaciones ha sido verificada y comentada, entre otros, por Burton Dreben en sus notas adjuntas a la publicación de los trabajos de Herbrand contenidos en From Frege to Gödel de van Heijenoort.

Nos dedicaremos ahora a examinar con algún detalle la primera observación posible. Nicod * construyó un sistema lógico reduciendo los usuales operadores de la lógica proposicional a solamente el operador de incompatibilidad, con el cual es posible construir un sistema funcionalmente completo debido a que permite expresar cualquiera de los 16 operadores binarios posibles. Dadas las restricciones del lenguaje de Nicod, no es posible formular en su sistema directamente el Modus Ponens sino su equivalente. Sin embargo la regla de inferencia usada no es justamente equivalente a la forma canónica de la regla de separación, pues su esquema es el siguiente:

---

* Al respecto puede consultarse Copi, Symbolic Logic, p. 268. El sistema de Nicod también es interesante porque usa sólo un axioma.

"Desde P y P. / . R / Q se infiere Q"

Realizando conocidas transformaciones, encontramos que el equivalente en notación usual de la regla de Nicod es:

"Desde P y P ---> (R.Q) se deduce Q".

Como puede verse fácilmente, el Modus Ponens es un caso particular de este esquema cuando se sustituye R por Q. + Pero, además, se puede constatar sin dificultad que la regla de Nicod equivale a la aplicación sucesiva del Modus Ponens y de la regla de simplificación, lo que prueba que la tradicional regla de inferencia es condición necesaria para la deducción en el sistema examinado.

Para examinar la posible objeción basada en una de las consecuencias del llamado teorema fundamental de Herbrand, contenido en su trabajo Investigations in proof theory (1930), es necesario traer a colación algunas características de su sistema, que es usualmente denominado con la abreviatura Q_H. En esta exposición prescindiremos de detalles técnicos muy elaborados y nos limitaremos a proporcionar, informalmente pero con precisión, aquello que es necesario para entender el sentido del argumento.

(i) Las llamadas "reglas del pasaje", que pueden denotarse por el par J_h; K_h, para h = 1, ...,6, son:

1. $\sim(x)\ \emptyset\ (x)$; $(Ex) \sim \emptyset\ (x)$
2. $\sim(Ex)\ \emptyset\ (x)$; $(x) \sim \emptyset\ (x)$.

+ Este resultado fue señalado por León Post en Introduction to a general Thery of elementaru prepositions, cifra 7.

3. $(x)\ \emptyset\ (x) \vee Z\ ;\ (x)(\emptyset\ (x) \vee Z)$.
4. $Z \vee (x)\ \emptyset\ (x)\ ;\ (x)\ (Z \vee \emptyset\ (x))$
5. $(Ex)\ \emptyset\ (x) \vee Z\ ;\ (Ex)\ (\emptyset\ (x) \vee Z)$
6. $Z \vee (Ex)\ \emptyset\ (x)\ ;\ (Ex)\ (Z \vee \emptyset\ (x))$

En estos pares de fórmulas se asume que la variable "x" no es libre en Z. Conmutando las fórmulas componentes obtenemos el par K_h; J_h, con lo que totalizamos 12 "reglas del pasaje" para el sistema del Herbrand. Asimismo es un resultado conocido, expresado en Q_H por la proposición 3.101, que para cualquier proposición P se puede obtener otra equivalente P' por aplicación de las reglas anteriores. La fórmula P' se denomina forma normal prenex y es de la forma:

$$(Q_1 y_1) \ldots\ (Q_n y_n)\ \emptyset\ (y_1 \ldots y_n)$$

en la que cada $(Q_i y_i)$ es un cuantificador universal o existencial que liga a alguna de las variables y_i, las cuales son todas distintas entre sí. Cuando todos los cuantificadores existenciales antecedan a todos los cuantificadores universales, la fórmula es conocida como forma normal de Skolem.

Una fórmula P es una <u>identidad normal</u> si existe alguna forma normal prenex P' de ella, desde la cual es derivable por medios conocidos una identidad del tipo

$$\emptyset\ (x) \vee \sim \emptyset\ (x)$$

que Herbrand denomina identidad de primera clase.

Una proposición P tiene la propiedad A si es posible drivar desde ella, mediante un proceso de sustitución de esquemas de cuantificadores *, una proposi - ción P' que es una identidad normal.

Si una proposición P tiene la propiedad A, entonces existe en el sistema Q_H una prueba para P **. En breve, si P tiene la propiedad A, entonces $\vdash_{Q_H} A$. Recíprocamente, si P es demostrable en el sistema Q_H, entonces P tiene la propiedad A.

Herbrand establece como resultado a partir de su teorema fundamental *** que la demostración en Q_H de una proposición P, que satisface la propiedad A, precisa única y exclusivamente de la aplicación de las "reglas del pasaje", de las reglas de generalización y de la regla generalizada de simplificación.

Conocida la forma lógica de las "reglas del pasaje" y de las reglas de generalización universal y existencial, es fácil constatar que ninguna de ellas legiti-

---

* Un "esquema de cuantificadores" y un "tipo" son nociones técnicas en el texto Herbrand que sería laborioso e innecesario considerar aquí en detalle. Asimismo no existe un algoritmo para decidir, en general, si cualquier proposición P tiene la propiedad A.

** Este es un resultado de Herbrand que establece que una teoría de primer orden es semánticamente completa, teorema cuya prueba usualmente se atribuye a Gödel (1930). Como lo señala Wang, Herbrand no concedió especial importancia a su demostración debido a que la noción de compleción no era significativa para él debido a que aceptaba solamente métodos finitísticos. Sobre este importantísimo mérito de Herbrand puede consultarse el artículo de Wang, Eighty years of foundational studies, contenido en la obra antes citada.

*** Vid. From Frege to Gödel, p. 558

mela operación de separación. Esto es, no nos permiten afirmar a partir de una proposición dada la verdad de una de sus proposiciones componentes, por lo que no hay razón para que alguna de ellas presuponga el Modus Ponens. Por tanto, de las reglas necesarias para construir una demostración en Q_H, solamente la regla generalizada de simplificación podría presuponer la validez del Modus Ponens, pues, como veremos a continuación al formular su enunciado, ésta si permite la separación de uno de sus componentes.

* Regla generalizada de simplificación Df. " Si en una proposición verdadera (demostrable en Q_H) la subproposición P v P es reemplazada por P, entonces obtenemos otra proposición verdadera."

La validez de esta regla derivada en Q_H supone la demostrabilidad de la fórmula P v P $\equiv$ P dentro de dicho sistema. En efecto, como Burton Dreben lo ha señalado en detalle en su nota B a la edición consultada, este teorema se establece demostrando en Q_H "P v P $\longrightarrow$ P" y "P $\longrightarrow$ P v P" sin necesidad de recurrir a la "regla de implicación" **. Por tanto, la prueba en Q_H de una proposición P, que tiene la propiedad A, puede realizarse sin ninguna dificultad con independencia del Modus Ponens, usando la regla generalizada de simplificación para garantizar el rigor de la operación de separación. Este resul

---

* Vid. Idem. Ibidem.

** Detalles de esta demostración pueden ser consultados en las notas A, B y D hechas por Burton Dreben a la obra de Herbrand en From Frege to Gödel, pp. 567 - 571.

tado se sigue claramente de la demostración antes descrita y es considerado por Herbrand de la mayor importancia. Dreben por su parte opina que es el resultado básico de la tesis sostenida en <u>Investigations in proof theory</u>.

Sin embargo la demostración reseñada no tiene la fuerza suficiente como para sustentar una afirmación en el sentido de que la aritmética sea formalizable sólo con los medios expresivos de Q_H de tal manera que no sea necesaria la "regla de implicación". Esta posibilidad, que debilitaría significativamente nuestro planteamiento, realmente no existe, en la medida que el mismo Herbrand anotó como una limitación de las consecuencias de su teorema fundamental que el <u>Modus Ponens</u> no es omitible en una teoría matemática que contenga hipótesis. Nuestro autor no entra en mayores detalles para fundamentar la exactitud de este último aserto, pero la argumentación que dimos para probar que la mencionada regla es condición necesaria para el uso del Principio de Inducción Matemática es suficiente para avalar la aserción herbrantiana con la única condición que el referido principio sea una hipótesis.

Ciertamente no es necesaria mayor argumentación para probar que el Principio de Inducción Matemática es una hipótesis. Al respecto basta señalar que es una proposición necesaria para derivar específicamente las proposiciones verdaderas de la aritmética y por ello hay que añadirla en las formalizaciones de ella a los enunciados estrictamente lógicos, como lo hace Herbrand tanto en <u>Investigations in proof theory</u> como en su tra bajo <u>On the consistency of arithmetic</u>(1931)*

2.3. <u>La demostración de la versión fuerte del Principio de Inducción Matemática desde la débil.</u>

Como una limitación de la argumentación precedente podría, tal vez, observarse que nuestro planteamiento carece de generalidad por que no afecta a la versión fuerte del Principio de Inducción Matemática. Sin embargo, sin excluir otras posibles respuestas a esta objeción, nos limitaremos a puntualizar que nuestro planteamiento si es válido para la denominada versión fuerte del principio analizado, en la medida que ésta puede ser demostrada a partir de la enunciación débil. Al respecto pueden encontrarse pruebas alternativas con relativa facilidad, pero la que nosotros brindaremos a continuación tiene la ventaja, para nuestros fines, de haber sido construida dentro de una teoría formalizada de números en la que se hace explícita la lógica subyacente.

Antes de proseguir, también es oportuno advertir que hemos optado por una formalización del Principio de Inducción Matemática** que podría no ser aceptada por ciertas posiciones intuicionistas. Esto es, lo expresamos a través de una fórmula lógica que contiene variables ligadas por cuantificadores, que son denominadas, dentro de una tradición iniciada por Whitehead y Russell, variables aparentes. Esta formalización tiene importantes di

---

* Vid Idem. pp. 618 - 628.

** En este caso carece de importancia distinguir entre las versiones débil y fuerte, pues para una posición filosófica sólo tiene relevancia la usada como axioma, esto es, la débil.

ferencias teóricas con la presentada, por ejemplo, por Herbrand en su demostración de la consitencia de la aritmética, la cual no contiene variables aparentes. De otra parte, anotamos que es generalmente a la versión fuerte a la que se denomina Principio de Inducción Completa.

La fórmula que demostraremos como teorema es la siguiente:

$$(\forall x)\ ((\forall z)\ (z < x \longrightarrow A(z)) \longrightarrow A(x)) \longrightarrow (\forall x)\ A(x)$$

que no es otra cosa que la formalización de la presentación informal que hicimos antes (Vid. sección 1.5), con la variante que no incluimos la primera premisa, en este caso, por ser innecesaria, debido a que la demostración presupone que 0 es el primer número natural y, en consecuencia, está dentro del rango de z. Como ya indicamos, la adopción de 1 ó 0 como primer natural es irrelevante.

En la demostración se utilizará el teorema de la deducción, y se tomarán como premisas algunos teoremas de la Teoría Formal de Números de Mendelson, los que listaremos a continuación. También se utilizarán como reglas de inferencia algunas tautologías, que por ser muy conocidas no hace falta que las especifiquemos previamente, y las reglas de introducción y eliminación de cuantificadores.

T1. $\sim (t < 0)$

T2. $A(0) \,.\, A(1) \,.\, \ldots \,.\, A(k) \equiv (\forall x)\ (x \leq k \longrightarrow A(x))$

T3. $t \leq r \equiv t < r'$ (En adelante para designar al sucesivo de t usaremos la expresión t')

T4. $x = y \longrightarrow (A(x,x) \longrightarrow A(x,y))$

D2. $z \leq x' \equiv z < x' \vee z = x'$

T5. $x \leqslant x$.

La demostración es como sigue:

I. Supongamos una propiedad tal como B(x) que sea en detalle de la forma $(\forall z)\ (z \leqslant x \rightarrow A(z)\ )$. Probaremos primero en esta primera parte que 0 tiene la propiedad B, esto es B(0). En la segunda parte probaremos que es verdad B(x') siempre que se suponga que se cumple la hipótesis inductiva B(x).

1. $(\forall x)\ ((\forall z)\ (z < x \rightarrow A(z)) \rightarrow A(x))$ Premisa.
2. $(\forall z)\ (\ z < 0 \rightarrow A(z)) \rightarrow A(0)$ EU en 1.
3. $\sim (z < 0)$ T1.
4. $(z < 0 \rightarrow A(z))$ Tau. $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$ y MP con 3.
5. $(\forall z)\ (z < 0 \rightarrow A(z))$ 3, GU.
6. $A(0)$ 2 y 5 MP.
7. $(\forall z)\ (z \leqslant 0 \rightarrow A(z))$ 6, T2 (para $k = 0$)
8. $B(0)$ 7 es B(0)
9. $(\forall x)\ ((\forall z)(z < x \rightarrow A(z)) \rightarrow A(x)) \vdash B(0)$; (Hay una prueba de que B(x) se cumple para $x = 0$).

II. 1. $(\forall x)\ ((\forall z)(z < x \rightarrow A(z)) \rightarrow A(x)\ )$ Premisa.
2. $(\forall z)\ (\ z \leqslant x \rightarrow A(z)\ )$ Hipótesis inductiva B(x)
3. $(\forall z)\ (z < x' \rightarrow A(z)\ )$ 2, T3.
4. $(\forall z)\ (z < x' \rightarrow A(z)) \rightarrow A(x')$ 1, EU.
5. $A(x')$ 3,4 MP.
6. $z \leqslant x' \rightarrow z < x' \ \vee\ z = x'$ Df. 2.
7. $z < x' \rightarrow A(z)$ 3, EU.
8. $z = x' \rightarrow (A(x') \rightarrow A(z)\ )$ T4. Simetría
9. $A(x') \rightarrow (z = x' \rightarrow A(z))$ En 8 Exportación, Conmut. y nuevamente Export.

10.	$z = x' \longrightarrow A(z)$	5,9 MP.
11.	$z \leq x' \longrightarrow A(z)$	6,7,10, por tautología $((p \rightarrow (q \vee r)) . (q \rightarrow z) . (r \rightarrow z)) \longrightarrow (p \rightarrow z)$
12.	$(Vz)\ (z \leq x' \longrightarrow A(z))$	Gen. en 11.
13.	$B(x')$	12 es $B(x')$
14.	$(Vx)((Vz)(z \leq x \rightarrow A(z)) \rightarrow A(x)) \vdash (Vx)(B(x) \longrightarrow B(x'))$	Este paso se justifica por aplicación del Teorema de la Deducción y Generalización U.

III. Desde lo establecido en I y II y el Principio de Inducción Matemática obtenemos $P \vdash (Vx)\ B(x)$. Vale decir, hemos obtenido una prueba a partir de la premisa P (P designa abreviadamente la primera línea de I y la primera línea de II) que nos permite generalizar la propiedad $B(x)$ a todo número natural. Ahora, por aplicación reiterada de la regla de Ejemplificación Universal obtenemos $P \vdash x \leq x \longrightarrow A(x)$, y por T5. y MP. tenemos $P \vdash A(x)$, y, aplicando la regla de Generalización Universal y nuevamente el Teorema de la Deducción, $\vdash P \longrightarrow (Vx)\ A(x)$, que, detallando P, es $\vdash (Vx)\ ((Vz)(z \leq x \longrightarrow A(z)) \longrightarrow A(x)) \longrightarrow (Vx)\ A(x)$.

Antes de terminar esta sección hacemos la salvedad de que aunque nuestra formalización del Principio de Inducción Matemática no es necesariamente compatible con el intuicionismo, sin embargo nuestra tesis sobre el estatuto de condición necesaria atribuido a la "regla de implicación", es compatible con la llamada lógica intuicionista de Gentzen* que la incluye como una de sus reglas primitivas de inferencia. De igual manera, Adrei - Nikolaevich Kolgomorov en su artículo On the principle of excluded middle (1925) desarrolla una lógica intuicionista, aprovechando los resultados Brouwer, en términos algo más exigentes que los que posteriormente utilizara Heyting. Kolgomorov prueba que el sistema de Hilbert - (1922) para la lógica proposicional es reducible a sus - sistema B que permite desarrollar la matemática sin la ayuda del principio del tercio excluido. Este sistema intuicionista también es compatible con nuestro planteamiento en la medida que utiliza el Modus Ponens como regla - de separación.

---

* Nos referimos a los sistemas NJ y NK. El sistema NJ, estrictamente intuicionista, se diferencia de NK porque no contiene como axioma al principio del tercio - excluido.

C A P I T U L O III

LA REDUCCION DE LOS AXIOMAS DE PEANO

3.1 La versión de los axiomas de Peano de Henkin.

En un artículo, titulado On Mathematical Induction (1963)*, el conocido investigador León Henkin analiza el concepto de definición por inducción matemática o definición recursiva, dentro del marco de los axiomas de Peano. Este trabajo se inscribe dentro de una línea de investigación que fue iniciada por Skolem en su publicación The foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without use apparent variables (1923).

Henkin, en el mencionado artículo, propone la reducción de los tradicionales cinco axiomas de Peano a sólamente tres. Para ello construye, usando el lenguaje de la teoría de conjuntos, un modelo tal como (N,0,S), - en el que figura un conjunto N que tiene a 0 como a un elemento y una operación unaria S sobre N. Un modelo así construido será llamado de Peano si satisface las siguientes tres condiciones o axiomas:

A1. $(\forall x)\ (x \in N \rightarrow Sx \neq 0)$

A2. $(\forall x)(\forall y)(x,y \in N,\ x \neq y \rightarrow Sx \neq Sy)$

A3. Si G es un subconjunto de N tal que:

a) $0 \in G$

b) $(\forall x)\ (x \in G \longrightarrow Sx \in G)$

Luego $G = N$

Interpretando estos axiomas en el conjunto de los números naturales y asociando la operación unaria S

---

* Ver referencias en bibliografía.

con la función sucesor, tenemos que el primer axioma expresa que el elemento 0 no es un sucesor. El segundo sanciona que dos números distintos tienen sucesores distintos, esto es, que la función sucesor es inyectiva. El tercero es la versión conjuntista del Principio de Inducción Matemática que establece, para la interpretación dada, que todo subconjunto de los números naturales que satisface los axiomas A1. y A2. es igual al conjunto de los naturales. En otras palabras, el tercer postulado establece que el conjunto de los números naturales es único y, además, el mínimo modelo de Peano.

Como se comprende, la noción de modelo de Peano usada por Henkin constituye una generalización de la versión original, pues admite explícitamente la existencia de estructuras distintas a los números naturales y que sin embargo pueden satisfacer los tres axiomas formulados. Así por ejemplo el conjunto de los enteros positivos pares es un modelo de Peano como puede verificarse fácilmente, interpretando el elemento 0 como el número 2 y la operación unaria S como la adición "x + 2".

Esta formulación del concepto de modelo de Peano, que permite entender a los naturales como un caso particular, plantea interesantes distinciones que por ahora, sólo señalaremos para posteriormente examinarlas con mayor detenimiento. Así, si tenemos una interpretación M de los axiomas A1 , A2 y A3 y ocurre que M es un conjunto isomorfo con el de los números naturales, entonces M es conocida bajo la denominación de una interpretación (modelo) "standard" para el sistema de Peano. Pero si M satisface los axiomas dados y sin embargo no es una estructura isomorfa con los naturales, entonces se dice que M es una interpretación (modelo) "no-standard" para los axiomas de Peano. El conocimiento de la existencia de los modelos "no-standard" ha planteado interesantes discusiones filosóficas como veremos luego.

Volviendo al análisis de los axiomas dados, encontramos que se ha prescindido del clásico primer axioma que dice "0 es un número" y del segundo (a6. en nuestra lista de la sección 1.3) cuyo enunciado es "si a es un número entonces su sucesivo también es un número". Ello ha sido posible por las condiciones dentro de las que se ha definido el modelo (N,0,S), que asumen que 0 es un elemento del conjunto de referencia N y que S es una operación en N, esto es, que es un subconjunto del producto cartesiano de N x N, ó en otros términos, que S es una operación cerrada en N. Estas condiciones de constitución del modelo hacen, evidentemente, innecesarios los axiomas omitidos.

Sin embargo, la reducción de los axiomas de Peano con ser interesante no es el único resultado importante del trabajo de Henkin. Para nuestros fines es también fundamental la distinción que efectúa entre el concepto de modelo de Peano y el de modelo inductivo. Este último se define como una estructura que satisface el axioma A3, lo que da lugar a que claramente pueda afirmarse que todo modelo de Peano es inductivo pero no la recíproca. Mediante ejemplos sencillos se demuestra que existe al menos un modelo que satisface el axioma A3 y no el axioma A1 y que existe al menos otro modelo que satisface el axioma A3 y no el axioma A2. Para el primer caso se construye el modelo (N",O",S") que contiene como a su único elemento a O" y define la operación unaria S" como S" O" = O". Para el segundo caso da como ejemplo el modelo (N"", a, S""), en el que N"" tiene exactamente dos elementos {a,b}. La operación unaria la define $(\forall x)$ (S""x = b). Este modelo no satisface el axioma A2, porque la operación unaria S"" siempre da un valor constante, pero si satisface el axioma A1 porque S""x $\neq$ a.

Una secuela inmediata de este resultado es que los primeros dos axiomas no son reducibles al tercero en el sentido de que no son consecuencias lógicas de él. Asimismo el Principio de Inducción Matemática tampoco es deducible de los postulados anteriores en tanto que en estos no aparece la noción de subconjunto y por sí mismos son insuficientes para expresar la unicidad del conjunto de los naturales y su <u>status</u> de mínimo modelo de Peano. Además, tomando como dominio de interpretación el conjunto de los polinimios con coeficientes enteros tales que el primer coeficiente es no-negativo, se encuentra que para esta interpretación A1, y A2 son verdaderos mientras que A3 es falso.

Asimismo este análisis pone en claro la especcial importancia del axioma A3. que a la luz de la argumentación dada aparece como un anunciado necesario a diferencia de otros que mediante modificaciones sencillas en la presentación clásica pierden su condición de postulados necesarios y pueden ser omitidos. De otra parte de los planteamientos de Henkin se deduce que debe tomarse precauciones para definir a los objetos que satisfacen el axioma A3. como números naturales, pues, como -

hemos visto, existen estructuras que son inductivas pero que son demasiado triviales y débiles para ser identificadas con los números naturales.

3.2. Un intento de deducción del Principio de Inducción Matemática desde una definición.

Russell, en Introducción a la Filosofía Matemática, exponiendo resultados de Principia Mathematica, proporciona una definición de número natural que intenta ser lo suficientemente potente como para derivar desde ella el Principio de Inducción Matemática e ironiza la negativa de Poincaré a aceptar esta reducción. Para lograr su objetivo define previamente la posteridad de un número natural como el conjunto formado por todos los elementos comunes a todas las clases hereditarias de las que el número natural dado es elemento. Anotamos que no citamos textualmente la versión española de la Introducción a la Filosofía Matemática porque es defectuosa, como puede verificarse revisando la sección 96 de Principia Mathematica, titulada On the posterity of a term.

Una clase herediaria -como es conocido- se define como la clase que tiene como elemento a n+1 siempre que tiene a n. La definición russelliana de número natural es: "Los números naturales son la posteridad de cero con respecto a la relación de predecesor inmediato (que es la recíproca de sucesivo)" (p. 41 de Introducción..). Esta definición equivale a afirmar que los n turales son todos los elementos comunes a las clases hereditarias que tienen como elemento a cero, lo que no es otra cosa que el enunciado del Principio de Inducción Matemática sino que poniendo énfasis en que los naturales constituyen el mínimo conjunto inductivo. En consecuencia, objetivamente, no parece haber aquí una reducción del principio en estudio sino una formulación equivalente, lo que Russell da muestras de aceptar cuando define a los naturales como - números inductivos, algunas páginas después. Sin embargo los resultados de Henkin no afectan la definición de Russell porque usan distintas interpretaciones de la relación "sucesor". Russell presupone la noción usual de sucesor que en Henkin es sólo un caso particular.

Asimismo debemos señalar una debilidad de la - tesis de Russell si admitimos, como es usual, que toda - definición es un recurso para lograr abreviaciones dentro de un sistema formal y que, por tanto, siempre es en principio eliminable sin producir más alteración que mayor laboriosidad en el desarrollo deductivo. Concedida esta propiedad como atribuible a toda definición, entonces, - como la tesis russelliana le da al Principio de Inducción Matemática el estatuto de una definición, podría inferirse que éste es en sentido estricto omitible para el desarrollo de la aritmética, lo que sería ciertamente una - consecuencia desafortunada, porque no hay axiomatización de la aritmética, ya sea del tipo de la de Peano o dentro de una teoría más general, que prescinda en rigor del - principio en estudio. Por añadidura, la expresión conjuntista de la aritmética, seguramente la más rigurosa para los matemáticos, mediante la teoría de las funciones recursivas primitivas, precisa necesariamente de la inducción matemática, lo que ya ha sido señalado claramente - por Herbrand y es un resultado definitivo sancionado por el teorema de la recursión que desarrollaremos en detalle más adelante. El artículo de Henkin, que hemos citado, está en gran medida dedicado a exponer el teorema de la recursión y todas sus implicancias en las llamadas definiciones recursivas o inductivas. Todo esto significa, o que el Principio de Inducción Matemática no es una definición como Russell pretendería, o que este autor utiliza la palabra' definición' en un sentido en el que no podemos distinguirla en lo fundamental del uso dado a - 'axioma' o 'hipótesis' necesaria para el desarrollo de - la 'teoría'.

3.3. La versión de los axiomas de Peano de Halmos(1960).

Una simplificación alternativa de los clásicos cinco axiomas de Peano es la que presenta Halmos en su - libro Naive Set Theory (1964), dentro del marco de su - teoría de conjuntos. Esta presentación tiene menos generalidad que la de Henkin en la medida que está formulada específicamente para el modelo de Peano constituido por los números naturales, los que previamente son definidos por el autor de manera constructiva, como a continuación se indica:

Df. 3 (i) $0 = \emptyset$

(ii) $x' = x \cup \{x\}$,

lo que equivale a definir cada número natural como el - conjunto de todos sus predecesores y, consecuentemente, establecer para cualquier número natural n un procedimiento efectivo para obtenerlo a partir del elemento de base que es el cero. Desde luego, la particularización realizada por Halmos puede ser generalizada sin ninguna dificultad con la sola admisión de otras posibles interpretaciones para los axiomas. También es factible particularizar el sistema para el número natural, sin necesidad de dar una definición, como lo hizo Peano.

Los axiomas proporcionados por Halmos son:

B1. $0 \in N$

B2. Si $n \in N$ entonces $n' \in N$

B3. Si $S \subseteq N$, y si $0 \in S$ y si $n' \in S$ siempre que $n \in S$, entonces $S = N$.

En esta reducción también permanece el Principio de Inducción Matemática que se encuentra formulado a través del axioma B3. Además, los dos axiomas usuales que faltan, los enunciados a7. y a8. (de nuestro listado de la sección 1.3) que expresan la inyectividad de la función sucesor y que 0 no es sucesor, respectivamente, se demuestran en este sistema como teoremas.

La demostración de a8. es inmediata. En el lenguaje de Halmos dicho axioma es la proposición:

B4. $(\forall n)\ (n' \neq 0)$.

Así, desde la definición de n' se deduce que un sucesor es igual a un conjunto que necesariamente tiene como elemento a n. Desde que 0 es, también por definición, igual al conjunto vacío, luego n' es siempre diferente de 0.

La proposición a7. en este caso es expresada por:

B5. $(\forall n)(\forall m)$(si $n, m \in N$ y si $n' = m'$, entonces $n = m$).

La demostración de la inyectividad de la función sucesor no es inmediata y requiere que previamente se demuestran dos proposiciones:

(i) ningún número natural es un subconjunto de cualquiera de sus elementos.

(ii) Cada elemento de un número natural es un subconjunto de él. O, lo que es equivalente, todo número natural es transitivo en el sentido de que satisface la siguiente condición: si $x \in y$, $y \in E$, entonces $x \in E$.

Los detalles de las demostraciones son fáciles de inferir de B1 - B3 y de la definición de número natural como un conjunto. Es suficiente señalar que ambas pruebas son en lo fundamental inductivas y que en caso necesario puede recurrirse a la obra citada de Halmos. Nosotros pasaremos directamente a la prueba de B5, asumiendo los resultados anteriores, para completar nuestra exposición sobre el mecanismo conjuntista de reducción de los clásicos axiomas de Peano.

La prueba de B5. puede hacerse por reducción al absurdo. Suponiendo que n y m son números naturales, tenemos como hipótesis de la demostración n' = m' y (n≠m). Luego, si $n \in n'$, por definición de n', entonces $n \in m'$ por hipótesis. Si $n \in m'$ y $m' = m \cup \{m\}$ luego es válida la disyunción $(n \in m) \vee (n = m)$. El segundo elemento de la disyunción se justifica porque el segundo componente de la unión que define a m' es un conjunto unitario. Asimismo por un razonamiento análogo podemos establecer la disyunción $(m \in n) \vee (m = n)$. Utilizando la hipótesis y aplicando la tautología del silogismo disyuntivo a cada una de las disyunciones construidas nosotros tenemos $n \in m$ y $m \in n$. Pero como hemos asumido la validez de la propo sición (ii) que afirma que todo número natural es transitivo, del resultado anterior se sigue que $n \in n$. Pero como además es una propiedad de todo conjunto la de estar incluido en sí mismo como subconjunto impropio, entonces se cumple $n \subseteq n$, con lo que tendríamos que existiría un número natural que sería subconjunto de uno de sus elementos, lo que es expresado por la conjunción $(n \subseteq n).(n \in n)$, que dice en detalle que el número natural n es un subconjunto del elemento n que pertenece al número natural n, lo que contradice la proposición (i) y, consecuentemente, establece el teorema.

De esta manera es claro que en la reducción realizada por Halmos no sólo permanece el Principio de Inducción Matemática como un axioma, sino que a su vez éste resulta indispensable para demostrar B5. que expresa el caracter inyectivo de la función sucesor, puesto que las demostraciones de los teoremas previos a la prueba dada son de caracter inductivo.

La diferencia entre las versiones de Henkin y de Halmos es que la primera, por las condiciones de construcción del modelo, no necesita ni hacer explícitos los dos axiomas que omite ni demostrarlos. La segunda, en cambio, no asume como condiciones de construcción las proposiciones que omite y de esta manera, en la medida que ellas son proposiciones verdaderas de la aritmética, se ve en la necesidad de demostrarlas como teoremas.

Empero, ambas axiomatizaciones, tal como han sido presentadas, todavía son insuficientes para la derivación de la aritmética, pues para ello es necesario pos tular adicionalmente el axioma de infinitud que puede ser formulado en términos de la existencia de un conjunto que tiene como elementos a 0 y al sucesor de cada uno de sus elementos, lo que, en otras palabras, es la afirmación de la existencia del conjunto de los números naturales con infinitos elementos.

El axioma de infinitud en el caso de Henkin se encuentra implícito al afirmar la existencia de N que contiene a 0 y a todos sus sucesores. Halmos y muchos otros matemáticos hacen explícito este axioma. De otra parte reducciones análogas a las descritas son frecuentes en las presentaciones actuales de la teoría de los números naturales. Otra versión, análoga a las alternativas descritas, puede encontrarse, por ejemplo, en el libro <u>The structure of the real numbers</u> (1963) de los autores L. Cohen y G. Erlich.

El estudio realizado de las presentaciones de la aritmética, antes descritas, parece justificar la conjetura de que el Principio de Inducción Matemática tiene un estatuto muy especial dentro de ella. La estructura de los sistemas descritos nos induce a sospechar que estamos ante una proposición no estrictamente demostrable. De otro lado si bien de los resultados de Henkin se deriva que A3. es una proposición insuficiente para deducir de ella la inyectividad de la función sucesor y el enunciado "0 no es un sucesor", sin embargo, de acuerdo a la versión de Halmos, claramente, el Principio de Inducción Matemática es necesario para probar la inyectividad de la función sucesor.

Si analizamos el sistema de Halmos, que parece ser más simple que el de Henkin por tener menos presupuestos, entonces encontramos que es posible establecer una relación a nivel de significado entre B1. y B2. y el enunciado del axioma de infinitud, pues ocurre que B1. establece que 0 pertenece al conjunto N y B2. afirma que si n es miembro de N también lo es n', mientras que el axioma de infinitud resulta estatuyendo lo predicado por ambos axiomas sino que en términos más fuertes, debido a que es además una afirmación que sanciona la existencia del conjunto N que satisface las condiciones B1 y B2. En consecuencia, parece posible simplificar aún más la aritmética de Peano, dentro del marco de la teoría de conjuntos de Halmos, utilizando como axiomas específicos solamente el de infinitud y el Principio de Inducción Matemática. Pero como el primero de los nombrados no es otra cosa que la postulación de la existencia del conjunto de los números naturales, asumiendo a 0 como el primer elemento de la sucesión, entonces el segundo de los nombrados es, estrictamente, el enunciado que permite el desarrollo del sistema al posibilitar inferencias legítimas cada vez que se haya verificado la existencia de un subconjunto que cumple con las condiciones fijadas por el antecedente del Principio de Inducción Matemática.

Asimismo, de esta suerte el Principio de Inducción Matemática resulta funcionando más propiamente como un esquema axiomático que como un axioma, en la medida que todas las proposiciones del sistema que tengan su forma pueden ser consideradas axiomas. Desde esta perspectiva conjuntista, la aritmética es un sistema con un sólo esquema axiomático específico, en sentido estricto, que genera infinitos axiomas a partir de los cuales se efectúan deducciones por *Modus Ponens*. Sin embargo la aritmética no se desarrolla rigurosamente solamente a partir del esquema axiomático mencionado. Como toda teoría necesita además definiciones de conceptos sustantivos como los de suma, multiplicación, potenciación, etc. Estas definiciones, desde la publicación del trabajo de Skolem que antes hemos citado, son usualmente formuladas mediante las conocidas definiciones recursivas que los matemáticos también denominan definiciones inductivas. Como Henkin lo ha enfatizado en el artículo antes mencionado, estas definiciones intuitivamente parecen justificarse solamente por el enunciado del Principio de Inducción Matemática, empero esta impresión puede conducir a error; cuando se formaliza la aritmética dentro del marco de la teoría de los conjuntos, pues dicho principio en este caso por sí mismo no justifica que la función utilizada para definir un concepto efectivamente exista y sea, además, única. Para legitimar la existencia y unicidad de la función del *definiens* de una definición recursiva, es necesario demostrar previamente un teorema conocido por los matemáticos como teorema de la recursión. Pero debido a que la demostración del referido teorema es inductiva (aunque se utilizan también otras propiedades de la teoría de los conjuntos), entonces, evidentemente, inferimos que aunque el Principio de Inducción Matemática no es condición suficiente para autorizar el uso de definiciones recursivas en la aritmética conjuntista, es, sin embargo, condición necesaria.

3.4 El teorema de la recursión.

La argumentación precedente será más comprensi ble y rigurosa si proporcionamos un ejemplo que nos permita luego apreciar los aspectos generales de la cuestión. El modo más frecuente como los matemáticos resuelven el problema de introducir en el sistema de la aritmética la definición de la adición para cualquier par de números, es formulando la siguiente definición recursiva.

Df. 3 a) $x + 0 = x$

b) $x + y' = (x + y)'$

Es fácil constatar que una vez que se asume esta definición se tiene un procedimiento efectivo para computar o construir mediante un conjunto finito de pasos la suma de cualquier par de números a partir del elemento de base que es 0 *. La definición Df. 3 puede ser expresada de manera más general, asumiendo que en lugar de la adición deseamos definir cualquier función arbitraria que denotaremos por u, la misma que no necesariamente puede ser definida de N en N, como en el caso anterior, sino también desde N sobre cualquier otro conjunto que tenga un elemento distinguido a y sobre el que exita una función f - de X en X. En este caso la nueva definición tendría la forma:

Df. 4. a) $u(0) = a$

b) $u(n') = f(u(n))$

Sin embargo, los matemáticos no asumen la existencia ni la unicidad de la condición u, pues ambas condiciones son probadas mediante el teorema de la recursión.

La exposición del citado teorema, que formularemos a continuación, la hemos tomado de Halmos con la dife

---

* Es un hecho conocido que la escuela intuicionista sostuvo que las únicas definiciones admisibles en matemática eran las de este tipo, pues son las únicas que pueden garantizar siempre que los valores de una función son cal-

rencia que añadimos la condición de unicidad que no aparece en la versión original.

Teorema de la Recursión.- Si a es un elemento de un conjunto X y si f es una función de X en X, luego existe - una única función u de N en X tal que u(0) = a y u(n') = f(u(n)) para todo n perteneciente a N.

El mecanismo de la prueba de este teorema consiste en construir un conjunto u de pares ordenados (n, x), tales que n ∈ N y x ∈ X, de tal manera que la segunda componente es única para cada elemento n de los (n, x) pertenecientes a u. De este modo el conjunto u satisface las condiciones de una función y la prueba de que para todo número natural n, la condición (n, x) ∈ u es verdadera, se hace aplicando el Principio de Inducción Matemática, que de esta suerte garantiza que el dominio de la función u es todo el conjunto de los números naturales.

Prueba.- Para construir u como un conjunto de pares ordenados, podemos considerar, previamente, una colección C de todos los subconjuntos A del producto cartesiano de - N x X. Los subconjuntos A se definen por las siguientes condiciones:

i) (0, a) ∈ A

ii) Si (n, x) ∈ A, entonces (n', f(x)) ∈ A, donde A es una variable que sirve para designar a cualquier elemento de la colección C.

Como el subconjunto impropio N x X satisface

---

culables mediante un procedimiento finitístico .

las condiciones i) y ii), entonces la colección C no es vacía. Satisface la primera condición porque $0 \in N$ y $a \in X$ por lo establecido en la hipótesis del teorema, - esto es el par $(0,a)$ $N \times X$. Satisface la segunda condición porque si n pertenece a N luego su sucesor también está en N por B2., y si x pertenece a X entonces f(x) - también está en X porque por hipótesis la función f es de X en X.

Sobre la colección C así defini construimos el conjunto u como la intersección de todos los miembros de C. Luego u es miembro de C por que satisface i) y ii). Lo primero porque $(0,a) \in A$ para todo A de la colección, lo que, por definición de intersección, establece $(0,a) \in u$, Lo segundo porque de la condición $(n,x) \in u$ se sigue lógicamente $(n', f(x)) \in u$. Esto debido, evidentemente, a que para todo A se cumple la condición iii) $u \subseteq A$. Luego, de $(n,x) \in u$ se sigue $(n,x) \in A$ por - iii), y, por definición de miembro de C, se cumple - $(n', f(x)) \in A$ para todo A. Consecuentemente, por definición de intersección, $(n', f(x)) \in u$.

Luego construimos un conjunto S integrado por - todos los números naturales n y para cada uno de los cuales existe un único elemento x de X tal que $(n,x) \in u$. Esto es, si ambos, $(n,x) \in u$ y $(n,y) \in u$, entonces $x = y$.

Probaremos ahora inductivamente que el dominio de u es todo el conjunto de los números naturales, demostrando primero que 0 pertenece a S (explícitamente, 0 satisface la condición $(n,x) \in u$ para un único x) y luego bajo la hipótesis inductiva de que $n \in S$, probaremos que

$n' \in S$ (demostraremos el condicional "$(n,x) \in u$, para un único $x \longrightarrow (n', f(x)) \in u$, para un único $f(x)$")

I. Probaremos $0 \in S$ por reducción al absurdo. Si se diera el caso que 0 no fuera miembro de S, entonces 0 debería ser primera componente de un par $(0,b)$, para $b \neq a$. Consideremos ahora el conjunto diferencia $u - \{(0,b)\}$. Esto significa que en el conjunto diferencia están todos los elementos de u con excepción del sustraendo $(0,b)$. Desde que por hipótesis para la RAA. $a \neq b$, $(0,a)$ no es el sustraendo y por tanto se cumple $(0,a) \in u - \{(0,b)\}$. El condicional "$(n,x) \in u - \{(0,b)\} \longrightarrow (n', f(x)) \in u - \{(0,b)\}$", es verdadero en la medida que suponer la negación del consecuente equivale a afirmar que $(n', f(x))$ no es miembro del conjunto diferencia, lo que implica $(n', f(x)) = (0,b)$, y de esta igualdad se sigue $n' = 0$, lo que es absurdo porque contradice B4. Por tanto, hemos probado que $(0,a) \in u - \{(0,b)\}$ y que "$(n,x) \in u - \{(0,b)\} \longrightarrow (n', f(x)) \in u - \{(0,b)\}$", lo que significa que el conjunto diferencia satisface las condiciones i) y ii) y, consecuentemente $u - \{(0,b)\} \in C$. Pero si $u - \{(0,b)\}$ es miembro de la colección C, entonces es un conjunto del tipo de los A y como u es por definición la intersección de todos los elementos de la colección, esto implica por iii) $u \subseteq u - \{(0,b)\}$, lo que es absurdo porque un conjunto no puede estar incluido en otro más pequeño.

II. La hipótesis inductiva para la demostración de la segunda parte del teorema es $n \in S$. Como hipótesis adicional para una prueba por reducción al absurdo asumiremos $\sim(n' \in S)$. Si $n \in S$ existe un único x de X tal que es verdad $(n,x) \in u$. Esto es, por hipótesis, la segunda componente del par (n,x) es única. Como $u \in C$, entonces se cumple $(n', f(x)) \in u$, por HP. y condición ii), puesto que $(n,x) \in u$.

De la hipótesis adicional para la RAA. se sigue inmediatamente que debe existir un par $(n', y) \in u$ para algún y tal que $y \neq f(x)$. En otras palabras, la segunda componente de algún par, que tiene como primera componente a n', no debe ser única. Construyamos el conjunto diferencia $u - \{(n',y)\}$. Como $n' \neq 0$, por un razonamiento análogo al de la parte I, $(0,a) \in u - \{(n',y)\}$. El conjunto diferencia también satisface la condición ii), pues el condicional "$(n,x) \in u - \{(n',y)\} \longrightarrow (n',f(x)) \in u - \{(n',y)\}$" es verdadero debido a que si se supone que el consecuente es falso tendríamos que admitir que $(n', f(x))$ es igual al sustraendo y que, consecuentemente, $f(x) = y$, lo que es absurdo porque contradice una consecuencia inmediata de nuestra hipótesis adicional. Lo anterior prueba que $u - \{(n',y)\}$ satisface las condiciones i) y ii) y que, por tanto, es miembro de C; si es miembro de C, entonces cumple la condicción iii), esto es, $u \subset u - \{(n',y)\}$, lo que es absurdo por la razón esgrimida al final de la parte I. En consecuencia $n' \in S$ y el teorema queda demostrado.

Como puede apreciarse, el sentido de ambas partes de la demostración es probar que suponer que u no es función lleva a predicar una propiedad absurda para u.

La prueba desarrollada pone en evidencia que el Principio de Inducción Matemática es condición necesa ria para la definición recursiva de funciones en tanto que el teorema que legitima este procedimiento lo presupone. Por tanto, el clásico quinto axioma de Peano no sólo posibilita demostraciones sino también definiciones.

La demostración de la condición de unicidad no la desarrollaremos en detalle pero puede hacerse con relativa facilidad construyendo una función u' arbitraria que satisfaga las condiciones demostradas para u. Por un rápido razonamiento se probará que estas funciones coinciden en todos sus puntos, vale decir, que se cumple u' = u.

Es pertinente anotar que hemos incluido una exposición detallada de la demostración del teorema de la recursión porque es un teorema necesario para comprender los fundamentos de la llamada teoría de las funciones recursivas, base de los procedimientos lógicos finitísticos o constructivos, que sin embargo es omitido en manuales de nivel intermedio como el de Delong, A profile of Mathematical Logic, que ni siquiera lo menciona. En el libro, varias veces ya citado, de Mendelson, que podría ser considerado avanzado, se postula sin demostración el enunciado del teorema de la recursión como la regla V de la sección sobre funciones recursivas primitivas p. 120.

Henkin, en el artículo antes mencionado, proporciona una demostración alternativa pero también de carácter inductivo. La versión de Halmos, que nosotros hemos expuesto, desarrollando detalles que no necesita especificar un matemático, está bosquejada en el trabajo de Henkin. La idea original de esta prueba se debería a

P. Lorenzen y a los resultados de Hilbert y Bernays quienes descubrieron la prueba sin conocer la exposición de Lorenzen. Sin embargo, la primera versión de la demostración del teorema de la recursión, según informaciones del mismo Henkin, se debería al matemático húngaro L. Kalmár.

3.5. La equivalencia del Principio de Inducción Matemática con el principio de buena ordenación.

Empero, la argumentación dada para fundamentar el estatuto de proposición privilegiada dentro de la aritmética del Quinto postulado de Peano (esto en el sentido proposición necesaria para definir y demostrar dentro del sistema de la aritmética)podría, tal vez, ser objetada aduciendo que existen presentaciones de la aritmética en las que el mencionado postulado aparece como teorema. Para sustentar esta contraargumentación podría señalarse conocidos resultados contenidos en algunos libros de análisis matemático. Por citar un ejemplo, en el texto Elementary Real Analysis de Anderson y Hall, el Principio de Inducción Matemática aparece como el teorema Th,2.12. El mismo resultado puede encontrarse en Hao Wang, Some formal details on predicative set theories, como proposición T4.8 (p.598 de ob. cit). En este segundo caso la diferencia es que, por ser un trabajo de formalización de la matemática, la demostración es mucho más elaborada porque hace explícita la lógica subyacente. Una versión española de esta prueba, que en lo fundamental sigue a Wang, puede encontrarse en el libro de J. Mosterin, Teoría axiomática de los conjuntos, que está desarrollado a manera de una teoría de primer orden con iden tidad.

Como primer comentario a tal demostración del Principio de Inducción Matemática, señalaremos que ella se lleva a efecto dentro de la teoría de ordinales, considerándose en este caso a los números naturales como el caso particular de los ordinales finitos. Este hecho impone una restricción a nuestra disertación en el sentido de que sólo haremos una presentación intuitiva de dicha demostración en la medida que de otro modo tendríamos que considerar un conjunto muy abultado de definiciones y teoremas previos que son innecesarios para nuestros objetivos. Omitirlos no resta en lo mínimo solidez a nuestro planteamiento.

El postulado fundamental, que hace posible la referida demostración, es el conocido principio de buena ordenación, que puede ser enunciado de la siguiente manera para los números naturales.

a) Cada subconjunto no vacío de N tiene un menor elemento.

Para seguir el sentido de la demostración es suficiente tener presente adicionalmente la definición de número, que hemos dada anteriormente, y asumir que el antecesor es menor que el sucesor en tanto, de conformidad con la misma definición, es válida la condición $x \in x'$, que usualmente se utiliza para definir la relación "menor que".

La demostración es por reducción al absurdo y el esquema de la prueba que a continuación expondremos sigue la idea expuesta por Hao Wang que, a su vez, en esta sección del trabajo antes citado, utiliza resultados de von Neumann y Bernays.

Se asumen como hipótesis $A(0)$, $(\forall x)\ (A(x) \longrightarrow A(x'))$ y un contraejemplo arbitrario $\sim A(x)$. Luego se construye el conjunto W de todos los números naturales para los que no se cumple el Principio de Inducción Matemática, esto es $W = \{ x \ / \sim A(x) \}$, aunque, evidentemente, cada elemento de W satisface el antecedente del principio. Luego, por el principio de buena ordenación, el conjunto de números naturales, u ordinales finitos, W tiene un miembro w que es su menor elemento. Por definición w solamente tiene dos posibilidades: $(w = 0) \vee (w = y')$. Los dos componentes de la disyunción conducen a contradicción como veremos. Si $w = 0$, entonces por hipótesis se cumple la condición $A(w)$ y por tanto $\sim (w \in W)$, lo que contradice la forma como hemos definido a w. En caso de que $w = y'$, entonces, por definición de número, hay un antecesor y. Ahora, y tiene dos posibilidades: $(y \in W) \vee \sim (y \in W)$. La primera opción implica que se cumple la condición $\sim A(y)$, pero como $(y < y')$ y, $(y' = w)$, luego w no sería el elemento menor de W, lo que nuevamente contradice la definición de w. La segunda alternativa implica que se cumple la condición $A(y)$ y, por hipótesis y MP, se tiene $A(y')$, pero como $y' = w$, luego $\sim (w \in W)$, lo que produce contradicción. Así el teorema queda establecido al probarse que suponer la existencia del conjunto W, de los enteros positivos no inductivos, por decirlo así, conduce a contradicción.

Es fácil advertir que si en lugar del enuncia do a) hubieramos utilizado la formulación equivalente:

a'·) Dado un subconjunto de N que no tiene un menor elemento, entonces, este subconjunto es vacío;

entonces la conclusión final de la demostración anterior sería que el conjunto W de los números naturales que no satisfacen el Principio de Inducción Matemática es vacío.

Sin embargo la demostración anteriormente expuesta no es suficiente para autorizarnos a pensar que el quinto postulado de Peano es reducible a una proposición más primitiva. Pues existe otro resultado matemático que establece que asumiendo la validez del Principio de Inducción Matemática es derivable el principio de buena ordenación, lo que equivale a demostrar el teorema recíproco y, consecuentemente, establece que el principio de buena ordenación y el Principio de Inducción Matemática son lógicamente equivalentes por implicarse mutuamente. Este hecho confirma las intuiciones de Poincaré quien refiriéndose a la posibilidad de demostrar la proposición "sobre la cual se apoya el razonamiento por recurrencia", señaló que los esfuerzos en ese sentido siempre conducirían a presuponer una hipótesis equivalente+.

La demostración de la derivabilidad del principio de buena ordenación por medios inductivos presupone algunas definiciones y propiedades que expondremos para garantizar la comprensión de este importante resultado.

+ Vid H. Poincaré, ob, cit. pp. 228 - 229.

Df. 1. El número n es el menor (o primer) elemento de M si $M \subset N$ y $(En)\ (n \in M\ .\ (Vm)\ (n \leq m\ .\ m \in M))$

T1. 0 es el menor (o primer) elemento de N* .

T2. Si $n \in N$ y $M = \{m/n < m < n'\}$, luego $M = \emptyset$

Dd. 2. $In = \{m/m \in N\ ,\ (En)\ (m \leq n\ )$. Intuitivamente ; - In es el conjunto de los antecesores de n más n - mismo.

En lo que sigue hacemos una exposición del teorema siguiendo la versión contenida en el libro de Cohen y Erlich, antes citado, como teorema 1.18.

b) Teorema (Principio de buena ordenación). Cada subconjunto no vacío de n tiene un menor (o primer) elemento.

La prueba, como ya lo indicaramos, es inductiva, pero se utiliza en este caso la llamada versión fuerte o principio de inducción completa. Asimismo, por commodidad demostrativa, lo que se prueba directamente es la proposición equivalente que dice "si M es un subconjunto de N, y M no tiene un menor (o primer) elemento, luego M es igual al vacío. Obviamente, en este artificio demostrativo se está utilizando la tautología de contraposición.

Se construye el conjunto K de todos los números naturales que no pertenecen a M, $K = \{n/\sim (n \in M)$. Probaremos por inducción fuerte que $K = N$ y en consecuencia $M = \emptyset$.

---

* Este teorema es presupuesto en la demostración del principio de Inducción fuerte de la sección 2.3. También allí aparece como proposición T1.

I. Se cumple que $0 \notin K$ porque como M es un subconjunto de números naturales, si tuviera a 0 como miembro, tendría un menor elemento, lo que contradice la hipótesis.

II. La hipótesis inductiva es que todos los antecesores de n' son miembros de K, en otros términos, - $In \subset K$. Desde esta postulación probaremos que $n' \in K$. Para cualquier p tal que $p \in M$, entonces $\sim(p \in In)$ porque $In \subset K$. Pero si p no está en In, entonces es diferente de n y de todos sus antecesores, y como no puede ser menor que todos ellos porque 0 es un antecesor de n, entonces $n < p$. Por T2., $n' \leqslant p$, pues no existe un número entre n y su sucesor n'. Así n' satisface la definición de menor elemento y, desde que por hipotesis M no tiene menor elemento, entonces, $\sim(n' \in M)$ y, por tanto, $n' \in K$.

Desde I y II, el principio de inducción fuerte, se concluye $K = N$, esto es, que el conjunto de los números naturales que no pertenecen a K sólo puede ser vacío, esto es, $M = \emptyset$.

Una demostración alternativa del teorema anterior pero más intuitiva puede verse en el libro de Anderson y Hall, Elementary Real Analysis, p. 29.

Por tanto podemos finalizar esta sección puntualizando, a la luz de los resultados matemáticos expuestos, que el Principio de Inducción Matemática es una proposición no estrictamente desmostrable dentro del conocimiento matemático y que todo lo que se ha podido demostrar no es su derivabilidad, en sentido estricto, sino la viabili dad de formular hipótesis lógicamente equivalentes.

Del mismo modo, la necesidad del referido principio dentro de las presentaciones axiomáticas de la lógica y de la aritmética formalizada, parece indicar que se trata de una proposición que es indesligable de las bases mismas de lo que podríamos llamar genéricamente los sistemas deductivos.

C A P I T U L O IV

LA NO-CATEGORICIDAD DE LOS AXIOMAS DE PEANO .

4.1 ¿Son los axiomas de Peano categóricos con independencia de la forma como se interprete el Principio de Inducción Matemática?

El Principio de Inducción Matemática cumple una función decisiva en la demostración de la categoricidad de los axiomas de Peano. Si se asume que el principio garantiza la ausencia de "intrusos" en la sucesión de los números naturales, entonces puede demostrarse la categoricidad de los axiomas de Peano, esto es, que dados dos modelos arbitrarios para dichos axiomas, entonces estos dos modelos siempre son isomorfos. En la medida que el modelo clásico de los axiomas de Peano es el conjunto de los números naturales, la categoricidad de la aritmética puede ser expresada, en este caso, en términos de que cualquier interpretación que satisfaga los axiomas de Peano(modelo) es isomorfa con el conjunto de los números naturales. En otras palabras, si los mencionados axiomas son categóricos, todas las interpretaciones que se den de ellos son fundamentalmente iguales, pues la relación de isomorfismo entre un modelo M y otro N exige una correspondencia de "uno a uno"(biyectiva) entre los elementos de M y de N y que todo axioma sea verdadero en M si y solamente si es verdadero en N. De otra parte si se postula que el Principio de Inducción Matemática no impide la presencia de "intrusos" en la secuencia de los naturales, esto es, si el conjunto de números que hay entre n y n' no es vacío, entonces puede construirse interpretaciones de los axiomas de Peano que los satisfagan (modelos) pero que sin embargo no sean isomorfos con el conjunto de los números naturales*.

---

* Anotamos que esta afirmación es perfectamente compati-

A estos modelos se los conoce como "no-standard" o "no-clásicos" y su descubrimiento se remonta al trabajo de Skolem titulado Mathematical Interpretation of Formal Systems publicado en 1934. Un modelo "no standard", por definición, tiene una estructura distinta a la de los números naturales y la prueba de su existencia es una limitación importante a la afirmación de la categoricidad de los axiomas de Peano y de la aritmética. La presencia de los modelos "no standard" significa que los axiomas de Peano permiten dar un tratamiento general a estructuras diferentes, lo que hace pensar que hay peculiaridades de éstas que no son agotadas por dicho sistema formal. El profesor de nuestra Universidad, Francisco Miró Quesada, en un artículo titulado La objeción de Rieger y el Horizonte de la Ontología Matemática, publicado en la revista Crítica (mayo de 1968), interpreta este resultado como una prueba clara de que el formalismo aludido no agota el concepto de número natural, lo que a su vez corroboraría lo establecido por el segundo Teorema de Gödel, que señala la necesaria imposibilidad de que un formalismo exprese completamente las verdades de la aritmética. Asimismo, esta imposibilidad se hace extensiva a todos los formalismo que contengan a la aritmética como parte.

---

ble con las demostraciones de la categoricidad de los axiomas de Peano utilizando los medios expresivos de la lógica de los predicados de segundo orden. Una demostración de este tipo puede encontrarse el libro de Joel W. Robbin titulado Mathematical Logic, a first course. A primera vista podría parecer que existe contradicción entre nuestro planteamiento y los resultados de Robbin, sin embargo no es así debido a que la prueba de categoricidad que este autor aporta está explícitamente restringida a los modelos principales ("full models") de

Una situación semejante, a la planteada por los axiomas de Peano, es la presentada por el cálculo proposicional clásico que no es categórico por la sencilla razón de que además de las interpretaciones bivalentes admite también modelos trivalentes, lo que fue demostrado por Lukasievics y Post, y esta propiedad puede luego ser generalizada a modelos n-valentes. Sin embargo, como es conocido, el cálculo proposicional, que es la teoría lógica más simple, es sintáctica y semánticamente completo. De este modo tenemos sistemas no categóricos que son incompletos, ejemplificados por la aritmética formalizada y sistemas no categóricos que son completos como el cálculo proposicional. Por tanto, la no categoricidad de un sistema no implica, su incompleción, pues del hecho de que un sistema posea la primera propiedad no se sigue que goce de la segunda. Por tanto, la argumentación del profesor Miró Quesada si pretendiera considerar que los sistemas no categóricos son necesariamente incompletos no se justificaría, aunque la afirmación recíproca sea correcta.

4.2. Teorema de Gödel y no-categoricidad de la Aritmética.

La existencia de modelos "no-standard" si está ligada a los resultados del teorema de Gödel, de incon-

---

Peano. Proporcionando algunos detalles, puntualizamos que Robbin denota a la aritmética formalizada por PA_2 y el enunciado que demuestra en la p. 162 es el siguiente: "Sea P la conjunción de las clausuras mediante cuantificadores universales de los cuatro axiomas de PA_2. Luego P(o mas precisamente $\{P\}$) es categórica respecto a sus modelos principales". Asimismo, previamente, en la p.

pleción de la aritmética formalizada, pero en el sentido de que este teorema, en conjunción con otros resultados, implica que la aritmética axiomatizada no es categórica y, consecuentemente, debe ser posible construir para ella, al menos un modelo "no-standard". Esta es la interpretación que da Hao Wang en su artículo The Axiomatic Method, contenido en la obra ya varias veces citada, a la relación entre los resultados de Gödel y la no categoricidad de la aritmética formalizada, como puede deducirse de la exposición de los argumentos de Wang que haremos a continuación+.

El mencionado tratadista propone el sistema Z que presupone la ordinaria lógica elemental con sus nociones de función de verdad, cuantificación e identidad. Los axiomas de Z son la versión de los de Peano dada por Henkin, la misma que hemos expuesto en la sección anterior al formular las proposiciones A1., A2. y A3., con la observación de que en el caso del segundo axioma, Wang realmente utiliza una proposición equivalente a A2. por aplicación de la tautología de transposición. A los tres axiomas indicados se añade cuatro más que expresan

---

145, se precisa por definición que los únicos elementos del modelo principal de PA_2 son los números naturales. Es en consecuencia claro que la prueba de categoricidad de Robbin coincide con el caso en el que por definición del modelo se garantiza la ausencia de "intrusos". Se trata de una "categoricidad relativa", usando la expresión empleada por Wang para señalar esta particularidad.

+ Kleene en Mathematical Logic, pp. 327-328 da una interpretación que coincide con la de Wang a las relaciones entre los modelos "no-standard" y el teorema de incompleción de Gödel.

las definiciones recursivas de la adición y de la multiplicación, completando así un conjunto de siete axiomas que a continuación enunciamos informalmente siguiendo el estilo expositivo que Wang usa en este caso *

z1. No existe ni siquiera un n tal que n' = 0

z2. Para todo m y para todo n, si m'=n', luego m = n.

z3. Para cada predicado H(x), si H(0) y si para todo n, H(n) implica H(n'); luego todo n, H(n).

z4. Para cualquier n, n + 0 = n

z5. Para todo m y para todo n, m + n' = (m + n)'

z6. Para cualquier n, n . 0 = 0

z7. Para todo m y para todo n, m . n'=(m . n)+m

La versión del segundo teorema de Gödel dada por Wang, en términos de incompleción sintáctica es la siguiente: "Sea S un sistema igual a Z o un sistema que contiene a Z como una parte. Si S es consistente, luego existe un enunciado perteneciente a S de la forma <u>para todo n, H(n)</u> el cual no es ni probable ni refutable en S, aunque H(0), H(0'), H(0''), son todos y cada uno de ellos probables en S. Por tanto si S es consistente, entonces S es incompleto y además no es completable"**.

---

* Lo que sigue es un resumen de la exposición hecha por Wang en la p. 19 de la obra antes citada, a la que añadimos algunos comentarios. El artículo fue publicado originalmente en 1953.

** Esta es la traducción del enunciado de Wang, nombrado en el artículo citado como "Teorema 3". Hacemos notar que de acuerdo al teorema de Rosser (1936) no es necesario hacer explícito que S es ω- consistente, lo que seguramente Wang, ha tenido en cuenta al formular este teorema. Al respecto, véase Mendelson, ob cit, proposición 3.32, p. 145.

Como claramente puede entenderse, en esta formulación del teorema de Gödel se esta poniendo énfasis en el nivel sintáctico de la incompleción de la aritmética formalizada, pues no recurre al semántico, de mayores resonancias, que se expresa puntualizando que existe a menos una proposición verdadera de la aritmética que es inderivable en Z.

De otra parte, Wang establece como teorema 1 "Cada sistema categórico es completo", lo que hay que entender también en el sentido de compleción sintáctica. Consecuentemente, desde el teorema 1 en conjunción con el resultado de Gödel se deduce que, si Z es consistente, entonces Z no es categórico, por aplicación del <u>Modus Tollens</u> al teorema 1.

Asimismo debemos indicar que la lógica de primer orden no es sintácticamente completa. De serlo, de conformidad con el teorema 8 de Wang que dice "Cualquier sistema completo es decidible", sería una teoría para lo cual existiría un procedimiento efectivo para decidir la validez de cualquier proposición, lo que contravendría los resultados del conocido teorema de Alonso Church. Este resultado está corroborado por el hecho de que si bien de acuerdo al primer teorema de Gödel la lógica de primer orden es semánticamente completa en el sentido de que toda proposición es demostrable si y solamente es válida, en cambio no existe un procedimiento efectivo para rechazar una proposición si no es válida. Sin embargo es importante indicar que la parte de los axiomas de Z constituida por los enunciados Z1., Z2. y Z3., que es la que propiamente define un modelo de Peano, configura un sistema completo y decidible. Este resultado es expresado por la proposición 5.2 del artículo de Wang en estudio*

La posibilidad de probar la compleción y decidibilidad de tal sistema radica en la posibilidad de eliminar los cuantificadores universales**. Evidentemente, estas constataciones no cuestionan la solidez del teorema de Gödel que ha sido demostrado para los axiomas de Peano más las definiciones recursivas de adición y multiplicación, en otros términos, para la aritmética formalizada a través de Z.

Pero como la compleción sintáctica y la decidibilidad son implicadas por la categoricidad pero no se cumple la afirmación recíproca, pues ya dimos como contraejemplo la lógica proposicional que es completa y decidible pero no categórica, puede demostrarse que los axiomas Z1., Z2. y Z3., no son categóricos como lo haremos luego, mediante la construcción de un modelo "no-standard" que debe ser entendido estrictamente sólo como una prueba constructiva de la no categoricidad de los axiomas de Peano formulados con los medios expresivos de una teoría de primer orden. En relación a todo el conjunto de axiomas de Z también pueden darse ejemplos de modelos "no-standard" y este resultado es debido a Skolem. El estudio de los modelos "no-standard" para fragmentos de Z ha sido hecho por Hasenjaeger y el que construiremos luego esta inscrito dentro de esta perspectiva, aunque no se -

---

* Según Mendelson, ob. cit. p. 116 el primero en demostrar la compleción y decidibilidad de Z1., Z2. y Z3. más la definición de adición fue Presburger en 1929.

** Vid. Wang, op. cit. p. 20.

debe a este tratadista. Ehrenfeucht en 1958 ha demostrado la existencia de al menos $2^{\aleph_0}$ modelos "no-standard" de cardinalidad $\aleph_0$ en un artículo publicado en <u>Notices American Mathematical Society</u>, volumen número 5.

Antes de pasar a la construcción de un modelo "no-standard" para los axiomas de Peano es pertinente que advirtamos que hemos preferido emplear la versión de Halmos, pues en la sección anterior ya hemos demostrado que Z1. y Z2. son demostrables desde ella cuando dimos una prueba para B4. y B5. Esta es una variante solamente en la forma de presentación que no afecta absolutamente la validez de la demostración que haremos, pues el modelo "no-standard" que construiremos satisface Z1., Z2. y Z3., lo que puede verificar el lector con mínimas adiciones de detalle.

4.3. <u>Construcción de un modelo "no-standard" para los axiomas de Peano.</u>

En lo que sigue procederemos a desarrollar el modelo "no-standard" sugerido por Hao Wang en su trabajo <u>The Axiomatization of Arithmetic</u>. Es evidente que se puede dar desarrollos alternativos a la propuesta de Wang, razón por la que hemos preferido el que nos ha parecido más intuitivo sin dejar por ello de ser riguroso.

Así por comodidad demostrativa se asume a 1 como al primer número natural. Igualmente para probar que el modelo propuesto satisface los axiomas de Peano, nos limitaremos a la versión de los mismos dada por Halmos.

1. Consideremos un universo V de propiedades - las cuales son predicables de números. Una propiedad - P(x) estará en V si y sólo si satisface una de las dos - siguientes condiciones:

a) P(x) es verdadera solamente para un conjunto finito de números de un conjunto dado.
b) P(x) es verdadera para todos los elementos del conjunto dado excepto para un conjunto finito de ellos.

En este desarrollo asumimos la usual postulación matemática que establece que el conjunto vacío es - finito.

Asimismo, por ejemplo, si P(x) es la propiedad "x es un entero positivo impar", entonces P(x) no pertenece a V, si se asume como referente de P(x) el conjunto N de los números naturales. No satisface la condición - a) porque P(x) es verdadera para infinitos elementos de la forma 2n + 1. No satisface la condición b) porque P(x) es falsa para infinitos números naturales de la forma 2n.

Consideremos el conjunto X = N U T (la letra - 'U' denota la operación de unión de conjuntos en este - contexto). El conjunto N, es el de los números naturales, siguiendo las convenciones antes utilizadas. El - conjunto T se define:

$$T = \left\{ x \;/\; x = \frac{2b+1}{2} \,,\quad b \in Z' \right\}^{*}$$

+ Z' denota el conjunto de los números enteros.

Cualquier elemento del conjunto X será denotado por la letra 'z'. El sucesor de z es z + 1. Así hemos construido el modelo (X, z + 1, 1) que satisface propiedades P(x) pertenecientes al universo V. Denotaremos a este modelo por X, que es su elemento característico, y probaremos que satisface los axiomas B1, B2 y B3 de la sección anterior.

2. Demostración de que el modelo X satisface los axiomas de Peano (Versión de Halmos)

X satisface obviamente el axioma B1 porque $1 \in X$, haciendo nuevamente la salvedad de que estamos postulando a 1 como primer natural.

X también satisface el axioma B2. En el caso $z \in N$, es evidente que $z + 1 \in N$, pues N es el modelo clásico de Peano. Si z es miembro del otro elemento de la unión, esto es si $z \in T$, entonces z es la forma $\frac{2b + 1}{2}$ y el sucesor $z + 1 = \frac{2b + 1}{2} + 1$ y esto último es igual a la fracción $\frac{2b' + 1}{2}$ que obviamente pertenece a T, con la acotación $b' = b + 1$. Por tanto, en todos los casos se cumple $z + 1 \in X$.

Ahora probaremos que X satisface B3 para cualquier propiedad P(x) de V. Es lícito, por prueba condicional, suponer que P(x) es una propiedad de V tal que se cumplen las condiciones P(1) y $P(n) \longrightarrow P(n + 1)$. Desde esta hipótesis se sigue inmediatamente que cuando $x \in N$ se cumple $(\forall x)\, P(x)$, pues N es un modelo de Peano. En el caso de $x \in T$ también demostraremos que se sigue $(\forall x)\, P(x)$, con lo cual la demostración de que X satisface B3 será completa y, consecuentemente, se habrá probado que X es un modelo de Peano.

La prueba es por reducción al absurdo. Supongamos que existe un x de T tal que $x = \frac{2b+1}{2}$ (este x lo llamaremos abreviadamente z/2) y que P(z/2) sea una afirmación falsa. En otros términos, estamos suponiendo que existe al menos un elemento de T que no satisface el Principio de Inducción Matemática. Pero si P(z/2) es falsa, entonces es verdad $\sim P(z/2)$. Asimismo por hipótesis y la tautología de transposición se cumple siempre la condición $\sim P(n) \rightarrow \sim P(n-1)$. En consecuencia se cumple por Modus Ponens la condición $\sim P(z/2 - 1)$ y así, por el mismo procedimiento, $\sim P(z/2 - 2)$ y todos los antecesores de z/2. Pero como en X los antecesores de z/2 son infinitos, entonces P(x) sería falsa de infinitos elementos, lo que contradice la condición b)*. Y desde que ya hemos demostrado que P(x) es una propiedad inductiva en N, entonces P(x) tampoco satisfacería la condición a). En consecuencia, hemos llegado a una contradicción, pues resulta que P(x) está fuera de nuestro universo V, lo que niega nuestros supuestos iniciales. Por tanto, se cumple para todo $x \in T$ la afirmación $(\forall x)\ P(x)$ y así queda establecido que X satisface el axioma B3 y es un modelo de Peano.

---

* Aquí no hace falta suponer infinitas aplicaciones de MP sino admitir que el conjunto $W = \{x \ / \ P(x)\}$, tiene infinitos elementos, lo que se prueba de modo inductivo para la relación antecesor.

Demostración de que N y X no son modelos isomorfos.

La prueba es por reducción al absurdo. Si N y X fuesen isomorfos entonces existiría una función $f: N \to X$ tal que sería biyectiva y cumpliría las condiciones:

c) $f(1) = 1$

d) $f(z + 1) = f(z) + 1$.

Luego, si $-1/2 \in X$ entonces existe un único $z \in N$ y $f(z) = -1/2$. Por condición c), se deduce $z \neq 1$, entonces como los elementos de N son o el elemento de base o sus sucesores, entonces z necesariamente debe ser sucesor de algún z_1 y por tanto $z = z_1 + 1$ y, consecuentemente, $1 \leq z_1 \leq z - 1$. Por condición d) y el resultado anterior $f(z) = f(z_1 + 1) = f(z_1) + 1$. Así obtenemos $-1/2 = f(z_1) + 1$ de donde se tiene inmediatamente $f(z_1) = -1/2 - 1 = -3/2$. Estos significa $z_1 \neq 1$. Consecuentemente z_1 es el sucesor de algún z_2 y $z_1 = z_2 + 1$ y se cumple $1 \leq z_2 \leq z_1 - 1 \leq z_1 \leq z$. De modo análogo al anterior, $f(z_2) = f(z_1) - 1$ y así, sucesivamente, podemos calcular el valor de la función para todos los antecesores de z hasta que en un número finito p de pasos calcularemos el valor de $f(z_p)$ para $z_p = 1$. Esto equivaldrá a haberle restado a f(z) el valor 1 un número finito p de veces. Esto es $f(1) = -1/2 - 1 - 1 - 1 - \ldots$, donde 1 aparece p veces. Por tanto $f(1) = -1/2 - (1 + 1 + 1 + 1 + \ldots)$ ó, lo que es lo mismo, $f(1) = -1/2 - p$ para $p \geq 1$. Pero la diferencia $-1/2 - p$ $(p \geq 1)$ es siempre menor que 0. En consecuencia $f(1)$ asume un valor menor que 0 lo que contradice la condición c). Así hemos probado que suponer que N y X son isomorfos conduce a contradicción, lo que establece el resultado buscado.

4.4 Conjeturas plausibles derivadas de la construcción de modelos "no-standard".

Los argumentos expuestos en este capítulo y la demostración precedente nos autorizan a formular algunos comentarios para luego hacer un planteamiento ligado a las consideraciones filosóficas que a menudo se han hecho sobre el teorema de Gödel y la incompleción de la aritmética formalizada.

c1. La construcción del modelo "no-standard" propuesto por Hao Wang asume, por las condiciones en que se define el conjunto X, la existencia de elementos entre n y n' lo que no permite la obtención recursiva de los elementos de la forma $\frac{2b + 1}{2}$ para b perteneciente a Z'. Estos elementos "intermedios" o, como los llama Wang, "intrusos", aunque no pueden ser obtenidos desde la definición recursiva de número que hemos dado, no son, sin embargo, excluidos por el Principio de Inducción Matemática que, como hemos visto, se cumple para el conjunto T. De otra parte, aunque el conjunto X en su totalidad satisface el Principio de Inducción Matemática, sin embargo no tiene primer elemento lo que es una limitación para llamarlo en términos constructivos conjunto bien ordenado y podría sugerir desde el ángulo intuicionista, la mayor generalidad en la aritmética, por su vigencia en los modelos no clásicos, del tradicional quinto axioma de Peano, respecto de la hipótesis de buena ordenación.

c2. Para construir T ha sido necesario debilitar el lenguaje definiendo un universo de propiedades -

P(x) que contiene más propiedades que las que satisfacen todos los números naturales, llamadas usualmente inductivas. Estas propiedades pertenecen a nuestro universo porque satisfacen la condición de definición b) pero, además de ellas, también pertenece a nuestro universo las propiedades que cumplen con la condición de definición a), las mismas que son fundamentalmente distintas a las usualmente inductivas, lo que inmediatamente se aprecia en una lectura de la definición dada para P(x) perteneciente a nuestro universo. Esto significa que la construcción del referido modelo "no-standard" presupone que el Principio de Inducción Matemática se cumple para más propiedades que las del conjunto de los números naturales. Evidentemente, asimismo, asumir que las llamadas propiedades inductivas satisfacen b) presupone que el conjunto vacío es finito.

c3. Tanto de las condiciones de construcción del modelo "no-standard" propuesto por Wang como del resultado de los trabajos de Erenfeucht que afirma la existencia de al menos $2^{\aleph_0}$ modelos "no-standard" de cardinalidad $\aleph_\alpha$, se deduce que todo modelo "no-standard" tiene al menos un subconjunto propio isomorfo con el de los números naturales. Asimismo, como del enunciado del Principio de Inducción Matemática se sigue que el conjunto de los números naturales es el mínimo modelo de Peano, entonces toda pretensión de que los axiomas de Peano no agotan las estructuras que los satisfacen debe ser tomada con precauciones, pues podría pensarse que no agotan solamente las estructuras mayores que los naturales, lo cual puede ser corroborado con argumentos que aportaremos luego.

c4. Si consideramos la demostración de Presbur ger (1929) y los resultados de Wang, en el sentido de que los axiomas de Peano, sin los enunciados que establecen las definiciones recursivas de adición y multiplicación, son completos y decidibles, entonces nos encontramos ante la legítima posibilidad de afirmar que los axiomas de Peano sí agotan el concepto de número natural, debido a que este concepto puede considerarse definido satisfactoriamente por Z1., Z2. y Z3. (o, si se prefiere, con la misma validez puede recurrirse a la versión de Halmos). En efecto, parece que el concepto de número natural queda así agotado porque se determina un sistema en el cual toda afirmación es probable o refutable mediante un procedimiento de demostración efectivo. La idea frecuente de que el teorema de Gödel prueba que un formalismo no agota el concepto de número natural resulta claramente debilitada debido a que este teorema es válido para la aritmética formalizada, esto es, para los axiomas de Peano más las definiciones recursivas de adición y multiplicación. Consecuentemente, quedarían en suspenso ciertas pretensiones neo-platónicas respecto a la ontología del número natural. De otra parte, la no-categoricidad de los axiomas de Peano parece no tener mayor relevancia respecto de su compleción, que podría ser la propiedad más importante para decidir si un sistema formal agota o no un concepto.

c5. La presencia de modelos "no-standard" para la aritmética, en otras palabras, para los siete axiomas de Z, plantea una situación parecida a la que se produce en la lógica proposicional cuando se construyen modelos trivalentes o en general n-valentes para $n \geq 3$. Esta situación consiste en que cierta tautologías de la lógica proposicional con interpretación bivalente ya no son válidas en un modelo trivalente, tal es el caso del principio del tercio excluido, la denominada Ley de Peirce, la fórmula correspondiente al principio de no contradicción, etc., por citar sólo algunos ejemplos del modelo trivalente propuesto por Newton Da Costa en <u>On the theory of inconsistent formal systems</u>. Ejemplos similares pueden encontrarse si se revisan los cálculos ya clásicos de Lukasievics y Post. Esta disminución progresiva de las tautologías se hace más notable a medida que aumenta la n-valencia del sistema. De manera análoga, con la construcción de modelos "no-standard" aparecen teoremas que son verdaderos en las interpretaciones clásicas pero que no son verdaderos de los modelos "no-standard", tal es el caso del teorema aritmético que afirma que el conjunto de números que están entre n y n' es vacío, el cual, por ejemplo, no sería verdadero de nuestro conjunto X.

c6. Finalmente si se considerara que no es lícito considerar que el número natural puede ser adecuadamente definido sin las operaciones de suma y multiplicación y que en consecuencia el teorema de Gödel si constituye una prueba de que Z no agota el concepto de número natural, entonces caben dos posibilidades al menos. La primera, que la aritmética es algo más que el concepto de número natural que puede ser agotado por los axiomas de Peano y esa parece que fue la intuición de Dedekind que, como ya lo señalamos antes, fue el genuino autor de los axiomas según se deduce de su carta a Keferstein. La segunda es que el conceder que un formalismo no agota un concepto no tiene porque conducir a un platonismo a no ser que previamente se asuma una concepción platónica del concepto.

CONCLUSIONES

1. El Principio de Inducción Matemática es necesario para el desarrollo de las teorías lógicas y metalógicas, pues es una proposición indispensable para la demostración de tanto teoremas como metateoremas que no podrían ser establecidos sin su ayuda. Consecuentemente, al menos la noción de prueba metateórica, para ser completa, debe necesariamente incluir la posibilidad de obtener una proposición por lo que podemos llamar, en este contexto, medios inductivos.

2. La aplicación del Principio de Inducción Matemática en cualquier razonamiento demostrativo presupone la validez del Modus Ponens que se comporta como su condición necesaria. Asimismo, quedan descartadas las pretensiones de formalizar la aritmética usando lógicas que prescindan del Modus Ponens, como es el caso del sistema de Herbrand. Lo mismo puede afirmarse de NJ y NK de Gentzen cuando se suprime en ellos la referida regla de inferencia.

3. La validez del Principio de Inducción Matemática no es composicionalmente justificable como la del Modus Ponens que es una tautología fácilmente decidible como tal. Este principio es una postulación que no puede ser considerada con el mismo estatuto que las proposiciones lógicamente válidas y que se justifica porque es necesaria para el desarrollo de la aritmética formalizada y de la lógica en toda su plenitud.

4. El Principio de Inducción Matemática parece ser una proposición no estrictamente demostrable dentro de

la aritmética formalizada, ya sea que la axiomatiza - ción se haga desde nociones primitivas, como en el caso del estilo de Peano, o dentro del marco de la teoría de los conjuntos. Decimos que no es estrictamente demostrable en el sentido de que su derivabilidad presupone una hipótesis que a su vez es deducible del Principio de Inducción Matemática manteniendo las - otras como constantes. Dicha hipótesis, que desde el punto de vista lógico resulta equivalente al Principio de Inducción Matemática, es el principio de buena ordenación. Esta equivalencia parecería confirmar la - intuición de Henri Poincaré quien sostuvo que toda - pretendida demostración del Principio de Inducción Matemática sería en gran medida circular, pues presupondría una hipótesis equivalente.

5. Dentro del marco de la teoría de los conjuntos es posible reducir los axiomas de Peano no solamente a - tres, como lo han hecho Halmos y Henkin entre otros, sino que parece fundado pensar que esta reducción puede llevarse a efecto hasta quedarnos solamente con - el Principio de Inducción Matemática más la postulación de la existencia del conjunto de los números naturales, entendido como el conjunto que tiene como elementos a cero y a todos sus sucesores.

6. El desarrollo de la aritmética desde la teoría de los conjuntos demanda la demostración del Teorema de la - recursión para garantizar la existencia de las funciones recursivas de adición y multiplicación. En tanto que la demostración de este teorema es inductiva, se pone al principio de Inducción Matemática, también en este caso, en la base del desarrollo de las funciones

recursivas. Es claro que en los desarrollos de la aritmética formalizada, que no presuponen la teoría de conjuntos, el Principio de Inducción Matemática no sólo es condición necesaria sino también es condición suficiente para legitimar la definicion de funciones recursivas.

7. Los axiomas de Peano no son categóricos en general sino solamente cuando se interpeta el Principio de Inducción Matemática de tal manera que no se admite "intrusos" en la sucesión de los números naturales. El sistema Z expuesto en 4.2, para la aritmética formalizada, tampoco es categórico y está sometido asimismo a las limitaciones que le imponen el teorema de incompleción de Gödel. Los axiomas de Peano en sentido estricto, esto es, las proposiciones Z1, Z2 y Z3, no están sujetos al teorema de Gödel antes mencionado porque constituyen un sistema completo y decidible como lo señala Wang y se deduce de la demostración de Presburger (1929). Por tanto estos resultados parecen indicar que el teorema de incompleción de Gödel afecta fundamentalmente da la aritmética más que al concepto de número en sentido estricto.

8. Existen dos sentidos en los que se puede afirmar que una formalización no agota un concepto. El primero se funda en la necesaria incompleción de una formalización de una teoría lo suficientemente rica y el segundo en la no categoricidad de una formalización porque impide expresar los aspectos diferenciales de un concepto. Sin embargo ambos sentidos no son equivalentes como lo menos visto en la sección 4.1 y 4.2,

pues aunque la incompleción implica la no-categoricidad, la no-categoricidad no implica la incompleción.

BIBLIOGRAFIA

AGAZZI, EVANDRO; La lógica simbólica
(Ed. Herder, Barcelona, 1967)

ANDERSON y HALL; Elementary Real Analysis
(McGraw Hill, 1972) Incluye la demostración de la equivalencia entre el PIM y el principio de buena ordenación.

BUNGE, MARIO; Intuición y Ciencia
(EUDEBA, Buenos Aires, 1965) Es interesante el capítulo segundo sobre el intuicionismo matemático.

CARNAP, RUDOLF; Introduction to Symbolic Logic and its applications
(Dover Publications, Inc. New York, 1958)

COHEN, L. y EHRLICH, G.; The structure of the real number
(D. Van Nostrand Company, Inc. 1963, - New Yersey). Contiene la demostración del Principio de buena ordenación a - partir del Principio de Inducción Matemática, p. 29.

COPI, IRVING, Symbolic Logic
(The McMillan Company, New York, 1967)

CURRY, HASKELL y FEYS, ROBERT; Lógica combinatoria
(Ed. Tecnos, Madrid, 1967) Ver capítulo segundo, sección B, Técnicas de Inducción. Se distinguen tres conceptos de inducción en Epiteoría o Metateoría.

El quinto postulado de Peano coincide con el concepto c. Inducción natural. Este libro fundamentalmente está dedicado a la lógica de la conversión lambda y sus ulteriores desarrollos en materia de eliminción de variable en la lógica de los predicados.

DA COSTA, NEWTON; <u>On the theory of inconsistent formal systems</u>
(Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. XV, num 4 octubre de 1974, Indiana) Aunque este trabajo no está directamente relacionado con el tema de esta tesis, sin embargo lo hemos mencionado en 4.4 porque es un sistema interesante para un modelo trivalente.

DEDEKIND, RICHARD; <u>Letter to Keferstein</u>
(Publicada en <u>From Frege to Gödel</u>. - Trd. de Stefan Bauer-Mangelberg y - Hao Wang. Existe una versión inglesa previa, que no traduce algunos detalles, debida exclusivamente al profesor Wang, quien en 1954 consiguió permiso de la Universidad de Göttingen - para publicarla.

DELONG, HOWARD; <u>A profile al Mathematical Logic</u>
(Addison-Wesley Publishing Company, - 1970)

FITZPATRICK, P.J.; *To Gödel via Babel*
(Mind. vol. LXXV, num.299, julio 1966)

FREGE, GOTTLOB; *Estudios sobre semántica*
(Ed.Ariel, Barcelona, 1971)Traducción de U.Moulines. Contiene, entre otros trabajos, el prólogo a *Las leyes fundamentales de la aritmética*.

FREGE, GOTTLOB; *Fundamentos de la aritmética*
(Ed. Lais, Barcelona, 1972) Trad.de Ulises Moulines, contiene un prólogo de Mosterín y un estudio de Claudio Imbert.

FURLAN, Augusto; *La Lógica de la deducción natural*
(Ed. del autor, Córdoba, Argentina, 1965). Es un estudio sobrio de los sistemas NJ, NK, LJ y LK de Gentzen.

HALMOS, PAUL; *Naive set theory*
(D. Van Nostrand Company, New York, 1964) Ver especialmente las secciones 12 y 18 que contienen las demostraciones de los teoremas de la recursión y de la recursión transfinita.

HENKIN, LEON; *On Mathematical Inducction*
(Artículo publicado en ruso, en Matematicheskoe Proveshchenie, Nº 6, 1959) La versión utilizada en este trabajo es la inglesa aparecida en American Mathematical Monthly en 1963.

HERBRAND, JACQUES; Investigations in proof theory: The properties of trúe propositions. (Publicado en la antología, anotada y comentada, From Frege to Gödel, editada por van Heijenoort, Jean. Ediciones de Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967) Esta antología cubre los trabajos más importantes en Lógica publicados entre 1879 y 1931. Contiene 46 trabajos escritos originalmente en 7 lenguas y solamente 5 de ellos no han sido incluídos en su integridad. Colaboran con notas y comentarios Quine, Dreben y Hao Wan. Este artículo de Herbrand es el capítulo V de su tesis dictoral defendida en la Sorbona en 1930. La traducción es de Dreben y van Heijenoort.

On the consistency of arthmetic (Publicado en From Frege to Gödel. Traducción de van Heijenoort.

HILBERT, D y ACKERMANN W. Elementos de Lógica Teórica (Ed. Tecnos S.A., Madrid, 1962)

KATTSOFF, LOUIS O. Empirical elements in mathematicians' proofs. (International Logic Review, N°4, 1971) pp. 191 - 201.

KLEENE, STEPHEN; Matematical Logic (John Wiley & Sons, Inc. New York, 1967)

KOLGOMOROV, Andrei N.; On the principle of excluded middle (Contenido en From Frege to Gödel) El artículo se publicó en ruso en 1925 y ha sido traducido por van Heijenoort con el permiso del autor.

KÖRNER, STEPHAN; Introducción a la filosofía de la matemática, (Siglo Veintiuno Editores S.A. México 1967).

LACEY, HUGH y JOSEPH; GEOFFREY; What the Gödel formula says. (Mind, Vol. LXXVII, num. 305, enero, 1968)

MASSEY, GERALD; Understanding Symbolic Logic (Harper & Row Publishers, New York, 1970).

MATES, BENSON; Lógica matemática elemental (Ed. Tecnos, Madrid, 1971)

MENDELSON, ELLIOTT; Introduction to Mathematical Logic. (D. Van Nostrand Company, Inc. Toronto, 1966).

MIRO QUESADA, FRANCISCO; La objeción de Rieger y el Horizonte de la Ontología Matemática. (Crítica, vol. II num. 5. 1968. México)

MOSTERIN, JESUS; Teoría axiomática de los conjuntos. (Ariel, Barcelona, 1971). Es un estudio serio sobre la axiomatizacion de la teoría de los conjuntos dentro de una teoría de primer orden que usa las reglas formuladas por el autor en _Lógica de primer orden._ Presenta la teoría de los números naturales dentro de la de los ordinales como el caso particular de los ordinales finitos. Se demuestran como teoremas los cinco tradicionales axiomas de Peano con la limitación que señalamos en la sección 3.5.

Lógica de Primer Orden
(Ariel, Barcelona, 1970)

NAGEL, E y NEWMAN; _La prueba de Gödel._
(Cuadernos filosóficos de la Universidad Autónoma de México, 1964).

NIVEN, IVAN; _Números racionales e irracionales._
(Randon House-Editorial Norman. Cali. Sin fecha de edición. El texto original en inglés es de 1961). Contiene un diseño elemental de algunas demostraciones sobre teoría de números debidas a Euclides y Cantor.

PEANO, GIUSEPPE; _The principles of arithmetic, presented by a new method._
(Publicado en _From Frege to Gödel._ trad. de van Heijenoort). Esta versión consiste del prefacio y de la parte 1 del libro original. Las partes 2,4,5 y 6 han sido reproducidas

sólo parcialmente, pues se ha omitido el desarrollo de los teoremas.

POINCARÉ, HENRY; Filosofía de la Ciencia.
(UNAM, México, 1964). Es una selección de textos debida a Elí de Gortari.
Ultimos pensamientos.
(Espasa Calpe, Bs. As., 1946)

POLYA, GEORGE; Matemáticas y razonamiento plausible
(Ed. Tecnos S.A. Madrid, 1966). Ver especialmente el capítulo séptimo. Los primeros capítulos contienen una excelente distinción entre conjetura inductiva en matemática y demostración por inducción matemática.

QUINE, WILLARD VAN ORMAN; Set theory ant its logic
(The Belknap Press Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1971).

ROBBIN, JOEL W; Mahtematical Logic, a first course
(W.A. Benjamín, Inc. New York,196[illegible]) Ver el Cap. VI. Lógica de segundo orden, en el que se da una prueba de categoricidad de la aritmética para sus full-models.

RUSSELL, BERTRAND; Introducción a la filosofía matemática.
(Editorial Losada, Bs.As.,1945).

SACRISTAN, MANUEL; Introducción a la Lógica y al análisis formal.
(Ed. Ariel, Barcelona, 1964)

SKOLEM, THORALF; The foundations of elementary Arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without of apparent variable ranging over infinite domains.
(Contenido en From Frege to Gödel. El artículo fue publicado originalmente en 1923 y ha sido traducido por Stefan Bauer-Mengelberg).

STAHL, GEROLD; Elementos de la metalógica y metamatemática.
(Ed. Universitaria S.A., Santiago de Chile, 1964).

STOLYAR, A.A., Introduction to Elementary Mathematical logical.
(The Massachusetts Institute of Technology Press, Massachusetts, 1970). Su edición original en ruso es de 1965).

SUPPES, PATRICK; Introducción a la Lógica Simbólica.
(Compañía Editorial Continental, México, 1966).

WALL, ROBERT; Introduction to Mathematical Lingüistics
(Prentice Hall Inc. , New Jersey, 1972)

WANG, HAO; Lógic, Computers, and Sets.
(Chelsea Publishing Company, New York,

1970). Ver el capítulo IV. The axiomatization of Arithmetic y el capítulo XXIV, Some formal details on predicative set theories. En la página 73 aparece la carta de Dedekin, antes citada, en la versión que es sólo de responsabilidad de Wang.

WHITEHEAD y RUSSELL; Principia Mathematica (Cambridge University Press, Londres, 1968) En volumen consultado para este estudio es el primero de la edición en tres tomos.

I N D I C E

CAPITULO I

EL PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA Y LA PRUEBA LOGICA

CAPITULO II

MODUS PONENS Y PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA

CAPITULO III

LA REDUCCION DE LOS AXIOMAS DE PEANO

CAPITULO IV

LA NO-CATEGORICIDAD DE LOS AXIOMAS DE PEANO