Referencia bibliográfica

Llanos, M. (1974). *Un procedimiento decisorio para fórmulas cuantificacionales monádicas de la lógica de primer orden.* [Tesis para optar el grado de Bachiller en Filosofía]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Letras y Ciencias Humanas. Unidad de Pregrado.

REPOSITORIO DIGITAL DE TESIS DE LA BIBLIOTECA DE LETRAS DE LA UNMSM

Autor	Marino Llanos Villajuan.
Título	Un procedimiento decisorio para fórmulas cuantificacionales monádicas de la lógica de primer orden.
País de publicación	Perú
Fecha de publicación	1974.
Tipo de publicación	Tesis de bachiller.
Idioma	Español

Resumen

Trata sobre los problemas en la lógica y en las matemáticas y sus posibles soluciones. Presenta el método de “Procedimiento desisorio“, “Método afectivo“ o “Algoritmo“; los cuales sirven para cierto tipo de problemas, dentro de la lógica y las matemáticas, cuya solución depende entera y únicamente de algún método que consiste en un número mínimo posible de reglas muy precisas que aplicadas correctamente a un determinado tipo de problemas, siempre conduce a una respuesta afirmativa o negativa, en un tiempo mínimo posible. Explica que los problemas para los cuales existen tales métodos, se les conoce con el nombre de problemas decibles y de otro modo, se dice que son indecibles.

Palabras clave	Matemática; Filosofía; Lógica.
Campo del conocimiento del OCDE	Filosofía
Tipo de trabajo de investigación	Tesis.
Nombre del grado	Bachillerato.
Grado académico	Bachiller en filosofía.
Institución que otorga el grado	Universidad Nacional Mayor de San Marcos

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

PROGRAMA ACADEMICO DE FILOSOFIA

UN PROCEDIMIENTO DECISORIO PARA FORMULAS CUANTIFICACIONALES MONADICAS DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO DE BACHILLER EN FILOSOFIA

MARINO LLANOS VILLAJUAN

LIMA - PERU

1974

UN PROCEDIMIENTO DECISORIO PARA FORMULAS CUANTIFICACIONALES MONADICAS DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN

A mis queridos padres Pedro -
Llanos A. y Agustina Villajuan
M., por su infatigable esfuerzo.

INTRODUCCION

En la lógica y en las matemáticas hay dos tipos de problemas en cuanto se refiere a su solución: los que admiten alguna solución y los que no admiten ninguna. Los problemas del primer tipo, en cuanto se refiere a la manera de resolverlos, se dividen a su vez, en dos clases: problema para los cuales existen métodos de solución mecánica e infalible, y problemas para los cuales no existen tales métodos. De este modo, por una parte, existen en las lógica y en las matemáticas, cierto tipo de problemas cuya solución no depende de ningún factor subjetivo del investigador, tales como, la agudez o la ingeniosidad, sino, dependen entera y únicamente de algún método que consiste en un número mínimo posible de reglas muy precisas, que aplicadas correctamente a un determinado tipo de problemas, siempre conduce a una respuesta afirmativa o negativa, en un tiempo mínimo posible. Tales métodos reciben el nombre de "procedimiento decisorio", "método efectivo"o "algoritmo", y a los problemas para los cuales existen tales métodos, se les conoce con el nombre de problemas <u>decidibles</u>, y de otro modo, se dice que son <u>indecidibles</u>. Por otra parte, para todo problema decidible, dado un procedimiento decisorio, siempre es posible construir un método equivalente o variante de dicho procedimiento y, por tanto, para todo problema decidible existe cuando menos más de una solución equivalente.

El propósito de la presente tesis -si es que no está errada- no es otra cosa que la de ofrecer una variante o equivalente más de tales métodos efectivos existentes para cierto tipo de problemas en la lógica. Es decir, lo que se pretende, de una manera modesta y sencilla , es simplemente, ofrecer un procedimiento decisorio para la resolución de la validez lógica de fórmulas cuantificacionales monádicas de la Lógica de Primer Orden. No se podría hacer más en este respecto en la lógica, pues, desde que A. Church sentó de una vez por todas su famosa tesis, al parecer cualquier otra camino o posibilidad original ha quedado totalmente cerrada definitivamente. En este sentido, lo que dice G. Hunter, hablando acerca de cuestiones análogas es también válido para el presente caso:"...I believe that the logician's most urgen tasks at present lie the field of non-standard logic"(1) es bastante acertado.

La estructura expositiva de la presente tesis es como sigue. Consta de dos partes. En la primera parte, por un lado, se presenta a las reglas decisorias para las fórmulas cuantificacionales monádicas de la Lógica de Primer Orden, y un número suficiente de ejemplos sobre la aplicación de cada una de dichas reglas; por otro lado, se presenta cierta aclaración terminológica, y conforme se va avanzando con la exposición a las reglas, se presenta la definición de ciertos conceptos básicos, necesarios para la comprensión de esta primera - parte, y que además, algunas de ellas serán usados a lo largo de toda la tesis. En la segunda parte se presenta a la fundamentación de las reglas decisorias presentadas en la primera parte. Ello consiste, en la demostración de seis teoremas correspondientes a las seis-formas básicas a las que se reduce toda fórmula cuantificacional de la Lógica de Primer Orden.

Ciertas ideas y sugestiones que encaminaron al graduando a construir el procedimiento decisorio propuesto en esta tesis tienen dos-fuentes de origen. Primero, en los elementales pero sólidos conocimientos recibidos por el graduando cuando era alumno del curso de - Lógica II, debido a la atención especial que se presta a los procedimientos decisorios en dicha asignatura, y a las sugestiones recibi-das de la lectura de la tesis doctoral del Dr. J. B. Ferro. Segundo, ciertas ideas debidas al intento de investigar por el graduando el - problema de la imposibilidad de decidir la validez de fórmulas cuantificadas únicamente con el auxilio de los métodos proposicionales, a raiz de ciertas sugestiones del procedimiento decisorio de W.V.O. - Quine (2). Por su puesto, que es preciso reconocer también, que los conocimientos y demás sugerencias provenientes de los otros profesores de lógica y disciplinas afines, constituyeron una base necesaria para el labor del graduando, sin el concurso de los cuales, no se hubiera podido hacer nada.

----

(1) Hunter, Geoffrey. METALOGIC. An Introduction to the Metatheory of Stadard First-Order-Logic. Macmillan, London, 1971.

(2) Quine, Willard V. O. Los Métodos de la Lógica. Ariel, Barcelona, 1969.

Es preciso, pues, insistir que lo se pretende en la presente tesis, es simplemente, demostrar que el método propuesto en ella, es decisorio para el tipo de fórmulas indicadas hace un momento. Por lo tanto, toda la suerte del graduando dependerá únicamente, de si es, o no es decisorio tal método.

PRIMERA PARTE

REGLAS DECISORIAS PARA LAS FORMULAS CUANTIFICACIONALES MONADICAS DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN

1.- REGLAS DECISORIAS PARA LAS FORMULAS BASICAS

Una fórmula monádica básica de la lógica de Primer Orden es - una fórmula dela forma $Q_1A_1,\ldots,Q_nA_n, 1 \leq i \leq n$, donde cada Q_i es o un (x) o un (Ex), y A_i no contiene ningún cuantificador ni - variable individual alguna que no sea la que aparezca en Q_i, ni algún signo de igualdad. De este modo, una fórmula básica es, o una fórmula universal, o una fórmula existencia, o una serie finita de fórmulas universales, o una serie finita de fórmulas existenciales o una combinación finita de fórmulas universales y existenciales, coligadas entre si por conectivas proposicionales. Además, dentro o fuera de algún operando A_i puede aparecer una o más letras proposicionales.

Antes de presentar las reglas decisorias para este tipo de - fórmulas, es necesario explicar brevemente el significado de ciertas expresiones técnicas que se usarán en lo sucesivo a lo largo - de esta tesis. Aunque la mauoría de estas expresiones son ya bastante conocidas en la literatura lógica, no sería por demás aclarar lo que ellos significan en este contexto.

a) Al hablar acerca de un Q_i cualquiera, en lugar de usar las - expresiones "cuantificador universal" o "cuantificador existencial" usaremos simplemente las expresiones abreviadas "U-cuantificador"y "E-cuantificador", respectivamente.

b) Al hablar acerca de una Q_iA_i cualquiera, esto es, de una fórmula básica, en lugar de usar las expresiones "fórmula universal"o "fórmula existencia", emplearemos las expresiones abreviadas "U- - fórmula" y "E-fórmula", respectivamente.

c) Al hablar acerca de un operando (o matriz) A_i cualquiera, en lugar de emplear las expresiones "operando de una fórmula universal" u "operando de una fórmula existencial", emplearemos las expresiones abreviadas "U-operando" y "E-operando", respectivamente. Finalmente,

d) Al hablar acerca de esquemas constituídas por letras predicados (con o sin subíndices) y conectivas proposicionales,resultantes de borrar a los cuantificadores y variables individuales,en - fórmulas básicas, en lugar de usar las expresiones "esquema de una fórmula existencial",usaremos las expresiones abreviadas "U-esquema" y "E-esquema", respectivamente. Y además, a estos

Ahora si, presentamos a las reglas decisorias para las fórmulas básicas.

RB. Sea S una fórmula cuantificacional monádica de la Lógica de Primer orden, cerrada y básica, sin signos de igualdad, con letras proposicionales o sin ellas. Para determinar la validez de esta fórmula, elimínese previamente a todas las conectivas "$\rightarrow$", "$\longrightarrow$", etc., sustituyendo por sus equivalente correspondientes, hasta reducir a otra fórmula equivalente S', tal que ésta última exhiba únicamente las conectivas "v", "." y/o "$\sim$", internada esta última. Ahora bien, una vez conseguida S', ésta tendrá cualesquiera de las siguientes formas:

I. $(x)\ A_1 ,\ldots\ldots, (x)\ A_m$

II. $(Ex)\ B_1 ,\ldots\ldots, (Ex)\ B_m$

III. $(x)\ A_1 ,\ldots\ldots, (x)\ A_m,\ (Ex)\ B_1 ,\ldots\ldots, (Ex)$

es decir, una serie finita de U-fórmulas, o una serie finita de E-fórmulas, o de ambas a las vez, donde m y n son enteros positivos finitos arbitrarios. Las reglas para decidir la validez de cada una de estas fórmulas asi reducidas son las siguientes:

R_1. Si S' es de la forma $(x)A_1 ,\ldots, (x)\ A_m$:

(1) Si el número de los U-cuantificadores es ≤ 1, bórrese simplemente al U-cuantificador y a las variables individuales y, luego determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

(2) Si el número de los U-cuantificadores es ≤ 2, bórrese a todos los U-cuantificadores y variables individuales y, luego, adscríbase un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada U-esquema A_i distinto de otro A_j, y finalmente, determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

R2. Si S' es de la forma $(Ex)B_1 ,\ldots, (Ex)B_n$, bórrese a todos los E-cuantificadores y variables individuales, y luego determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

R3. Si S' es de la forma $(x)A_1 ,\ldots, (x)A_m, (Ex)B_1 ,\ldots, (Ex)B_n$:

A) Si el número de los U-cuantificadores es $\leq$ 1: se procede en forma idéntica al R2.

B) Si el número de los U-cuantificadores es $\leq$ 2, procédase sucesivamente como sigue:

(1) Siempre que se considere conveniente y sea posible, para mayor simplicidad, redúzcase el número de los U- y E-cuantificadores empleando las equivalencias $(x)A_1 \ldots\ldots (x)A_m . \Longleftrightarrow . (x)(A_1 \ldots\ldots A_m)$ y $(Ex)B_1 v \ldots\ldots v\ (Ex)\ B_n . \Longleftrightarrow . (Ex)(B_1 v \ldots\ldots v B_n)$.

(2) Hállese la forma normal conjuntiva, tomando a cada U- y E-fórmula en bloque como si fueran simples letras proposicionales.

(3) Bórrese que todos los cuantificadores y variables individuales y, luego:

(3.1) En cada miembro de la FNC, que contenga la disyunción de U- y E- esquemas, si el número de los U-esquemas es $\leq$ 2, sustitúyase a cada E-esquema B_i por la disyunción de m miembros $B_i v \ldots\ldots v B_{in}$ y, luego a todas las letras predicados de cada par de fórmulas (A_i, B_{i_i}) adscríbase un mismo subíndice, usando un subíndice distinto para cada par que difiera en el U-componente. De otro modo, si el número de los U-esquemas es $\leq$ 1, procédase en forma similar a A).

(3.2) En los demás miembros de la FNC, procédase simplemente conforme a R_1 o R2, según sea el caso. En la práctica todo el paso(3)se efectúa simultaneamente de un modo, .n cualesquiera de las formas I - III de S', ésta será 1-válida sss su esquema S'_p correspondiente es tautológicamente válido.

ALGUNOS EJEMPLOS DE LA APLICACION DE ESTAS REGLAS

EJEMPLO SOBRE LA FORMA I.

(1) S $\sim (x)\ (Fx.Gx. \longrightarrow Gx)\ .\ (Ex)\ Hx. \longrightarrow .\ (x)\ (HxvFx)$

$\sim (\sim(x)\ (Fx.Gx. \longrightarrow .Gx).\ (Ex)Hx)\ v\ (x)\ (HxvFx)$

$(x)\ (Fx.Gx. \longrightarrow .Gx)\ v \sim (Ex)Hx.\ v.\ (x)\ (HxFx)$

$(x)\ (\sim(Fx.Gx)vGx)\ v\ (x) \sim Hx.\ v.\ (x)\ (HxvFx)$

S´ $(x)\ (\sim Fxv \sim GxvGx)\ v\ (x) \sim Hx.\ v.\ (x)\ (HxvFx)$

$m = 3:$

$(\sim F_1\ v \sim G_1\ v\ G_1)\ v \sim H_2.\ v.\ (H_3\ {}^{v}F_3)$

S es válida.

(2) S $(Ex)\ (Fxv \sim Hx)\ .\ (Ex)\ (\sim Gx.Dx) \longrightarrow .\ (x)\ (FxvDx)$

$\sim((Ex)\ (Fxv \sim Hx)\ .\ (Ex)\ (\sim Gx.Dx))\ v\ (x)\ (FxvDx)$

$\sim(Ex)\ (Fxv\ Hx)\ v \sim (Ex)\ (\sim Gx.Dx)\ .\ v\ .\ (x)\ (FxvDx)$

$(x) \sim (Fxv \sim Hx)\ v\ (x) \sim (\sim Gx,Dx)\ .v.\ (x)\ (FxvDx)$

S´ $(x)\ (\sim Fx.Hx)v\ (x)\ (Gxv \sim Dx)\ .v.\ (x)\ (FxvDx)$

$m = 3:$

$(\sim F_1\ .H_1)\ v\ (G_2\ v \sim D_2)\ v\ (F_3\ v\ D_3)$

$F_1\ {}^{v}G_2\ v \sim D_2\ {}^{v}F_3\ {}^{v}D_3\ .H_1\ {}^{v}G_2\ {}^{v}\sim D_2\ {}^{v}F_3\ {}^{v}D_3$

S no es válida

(3) S $(Ex)\ (Fx \longrightarrow Hx.v.Fx \longrightarrow Gx).(Ex) \sim Fx. \longrightarrow (x)$
$(Fx\ . \longrightarrow .\ HxvFx)$

$\sim((Ex)\ (Fx \longrightarrow Hx.v.Fx \longrightarrow Gx)\ .\ (Ex) \sim Fx))v\ (x)$
$(Fx. \longrightarrow HxvFx)$

$\sim(Ex)\ (Fx \longrightarrow Hx.v.Fx \longrightarrow Gx)\ v \sim (Ex) \sim Fx.v.(x)$
$(Fx\ . \longrightarrow .\ HxvFx)$

$(x) \sim (Fx \longrightarrow Hx\ .v.\ Fx \longrightarrow Gx)\ v\ (x)\ Fx\ .v.\ (x)$
$(Fx\ . \longrightarrow\ .HxvFx)$

$(x)\ (\sim(Fx \longrightarrow Hx)\ . \sim (Fx \longrightarrow Gx))v\ (x)\ Fx.v.$
$(x)\ (Fx\ . \longrightarrow\ .\ HxvFx)$

S´ $(x)\ (Fx\ . \sim Hx.\ Fx\ . \sim Gx)\ v\ (x)Fx.\ v\ (x)(\ FxvHxvFx)$

$m = 3:$

S´p $(F_1\ . \sim H_1\ . \sim G_1)\ vF_2\ .v.\ (\sim F_3\ vH_3\ vF_3)$

T

S es válida.

(4) S $(Ex)\ Fx v\ (Ex)\ Gx v\ (Ex)\ Hx\ . \longrightarrow .\ (x)\ (Fx v Gx v Hx)$

$\sim((Ex)\ Fx v\ (Ex)\ Gx v\ (Ex)\ Hx)\ v\ (x)\ (Fx v Gx v Hx)$

$\sim(Ex)\ Fx\ . \sim (Ex)\ Gx\ . \sim (Ex) Hx\ .v.\ (x)\ (Fx v Gx v Hx)$

S' $(x) \sim Fx.\ (x) \sim Gx.\ (x) \sim Gx\ .v.\ (x)\ (Fx v Gx v Hx)$

$m = 4$:

S'_p $\sim F_1\ . \sim G_2\ . \sim H_3\ .v.\ (F_4\ vG_4\ vH_4)$

$\sim F_1\ vF_4\ vG_4\ vH_4\ . \sim G_2 vF_4\ vG_4\ vH_4\ . \sim H_3\ vF_4 vG_4 vH_4$

S no es válida.

(5) S $(Ex)\ (Fx.Gx.\ Hx.Dx)\ . \longrightarrow .\ (x)\ Fx v\ (x) \sim Gx v\ (x) \sim Hx v\ (x)\ Dx$

$\sim (Ex)\ (Fx.Gx.Hx.Dx)\ .v.\ (x)\ Fx v\ (x) \sim Gx v\ (x) \sim Hx v\ (x)\ Dx$

$(x) \sim (Fx.Gx.Hx.Dx)\ .v.\ (x)\ Fx v\ (x) \sim Gx v\ (x) \sim Hx v\ (x)\ Dx$

S' $(x)\ (\sim Fx v \sim Gx v \sim Hx v \sim Dx).v.\ (x)\ Fx v\ (x) \sim Gx v\ (x) \sim Hx v\ (x)\ Dx$

$m = 5$:

S'_p $(\sim F_1\ v \sim G_1\ v \sim H_1\ v \sim D_1)\ .v. \sim G_3\ vF_2\ v \sim H_4 vD_5$

S no es válida

EJEMPLOS SOBRE LA FORMA II.

(1) S $(x)\ (Fx \longrightarrow Gx).\ (x)\ (Fx v Hx).\ (x)(Hx \longrightarrow Fx)\ . \longrightarrow .\ (Ex)\ (Fx.Gx)$

$\sim((x)\ (Fx \longrightarrow Gx)\ .\ (x)\ (Fx v Hx)\ .\ (x)\ (Hx \longrightarrow Fx)\ v\ (Ex)\ (Fx\ .\ Gx)$

$\sim (x)\ (Fx \longrightarrow Gx)\ v \sim (x)\ (Fx v Hx)\ v \sim (x)(Hx \longrightarrow Fx)$

$(Ex) \sim (Fx \longrightarrow Gx)\ v\ (Ex) \sim (Fx v Hx) v (Ex) \sim (Hx \to Fx)\ .v.\ (Ex)\ (Fx.Gx)$

S' $(Ex)\ (Fx\ . \sim Gx)\ v\ (Ex)\ (\sim Fx. \sim Hx)\ v\ (Ex)\ (Hx\ . \sim Fx)\ .v.\ (Ex)\ (Fx.Gx)$

S'_p $(F\ . \sim G) v (\sim F\ . \sim H)\ v\ (H\ . \sim F)\ .v.\ (F.G)$

Conm. y Asoc. :

$((F\ . \sim G)\ v\ (F.G)) v ((\sim F\ . \sim H))\ v (\sim F. \sim H) -$

Haciendo la oper. inversa de la distrib.: Distr:

$(F\ . \sim GvG)\ v\ (\sim F\ . \sim HvH)$

Fv~F . Fv~HvH . ~GvG v ~F . ~GvGv~HvH

S es válida

(2) S (x) (Fx.Gx) . (x) (Hxv ~ Fx) . ——> . (Ex) (GxvHxv ~ Fx)

~((x) (Fx.Gx).(x) (Hxv ~ Fx)) v (Ex) (GxvHxv~Fx)

~ (x) (Fx . Gx) v~(x) (Hxv~Fx) .v. (Ex) (GxvHxv~Fx)

(Ex)~(Fx . Gx) v (Ex)~(Hxv~Fx) .v. (Ex) (GxvHxv ~ Fx)

S´ (Ex) (~FxV~Gx) v (Ex) (~Hx.Fx) .v. (Ex) (GxvHxv ~ Fx)

S'_p (~Fv~G) v (~$\cancel{H}$ .F) .v. (GvHv ~F)

Fv~GvFvGvHv~F

S es válida

(3) S (x)(FxvGxvHx).(x)(~Hxv~Gx) .----> . (Ex)(Fx.~Hx. ~Gx)

~((x)(FxvGxvHx).(x)(~Hxc~Gx)) v (Ex) (Fx.~Hx.~ Gx)

~(x)(FxvGxvHx)v~(x) (~Hxv~Gx) .v. (Ex) (Fx.~Hx. ~Gx)

(Ex)~(FxvGxvHx) v (Ex)~(~Hxv~Gx) .v. (Ex) (Fx.~Hx.~Gx)

S´ (Ex) (~Fx .~Gx. ~Hx) v (Ex) (Hx.Gx).v. (Ex) (Fx.~Hx.~Gx)

S'_p (~F.~G.~H)v(H.G) .v. (F.~H.~G)

(~H.~G:~F)v(~H.~G:F) v (H.G)

(~H.~G) . (~$\cancel{F}$ v $\cancel{F}$) .v. (H.G)

T

(~H.~G) v (H.G)

HvH .~HvG.~GvH.~GvG

S no es válida

(4) S $(x)(FxvHxv{\sim}Gx)\ .\longrightarrow.\ (Ex)\ Fxv\ (Ex)\ Hxv\ (Ex){\sim}Gx$

$\sim(x)\ (FxvHxv{\sim}Gx)\ .v.\ (Ex)Fxv(Ex)Hxv(Ex){\sim}Gx$

$(Ex){\sim}\ (FxvHxv{\sim}Gx)\ .v.\ (Ex)\ Fxv\ (Ex)\ Hxv\ (Ex){\sim}Gx$

S′ $(Ex)\ ({\sim}Fx.\ \ Hx.Gx)\ .v.\ (Ex)\ Fxv\ (Ex)\ Hxv\ (Ex){\sim}Gx$

$({\sim}\cancel{F}\ .\ {\sim}\cancel{H}\ .\ {\sim}G)\ vF\ vHv{\sim}G$

${\sim}GvFvHv{\sim}g$

S es válida

(5) S $(x)(Gx.Hx).(x){\sim}Fx.\ (x){\sim}Tx\ .\longrightarrow,\ .(Ex)(Gx.Hx.$
${\sim}Fx.\ {\sim}Tx)$

${\sim}((x)(Gx.Hx).(x){\sim}Fx.(x)\ {\sim}Tx).v.(Ex)(Gx.Hx.{\sim}Fx.{\sim}Tx)$

${\sim}(x)(Gx.Hx)v{\sim}(x)\ {\sim}Fxv{\sim}(x){\sim}\ Tx.\ \lor\ .\ (Ex)(Gx.Hx.{\sim}$
$Fx\ .{\sim}Tx)$

$(Ex){\sim}\ (Cx.Hx)\ v\ (Ex)\ Fxv\ (Ex)\ Tx.v.\ (Ex)(Gx.Hx.{\sim}$
$Fx.{\sim}Tx)$

S′ $(Ex)({\sim}Gxv{\sim}Hx)\ v\ (Ex)\ Fxv\ (Ex)\ Tx\ .v.\ (Ex)\ (Gx.$
$Hx.{\sim}Fx.{\sim}Tx)$

S'_p $({\sim}Gv{\sim}H)\ vFvT.v.\ (\cancel{G}.\cancel{H}.{\sim}\cancel{F}.{\sim}\ T)$

${\sim}Gv{\sim}HvFvTv{\sim}T$

S es válida

(6) S $(x)(Hx\longrightarrow Ax)\ .\ (x)(Ax\longrightarrow Cx)\ .\longrightarrow.\ (Ex)$
$(Hx\longrightarrow Cx)$

${\sim}((x)(Hx\longrightarrow Ax).(x)(Ax\longrightarrow Cx))\ v\ (Ex)(Hx\rightarrow Cx)$

${\sim}(x)\ (Hx\longrightarrow Ax\ {\sim}(x)(Ax\longrightarrow Cx)\ .v.(Ex)(Hx\rightarrow Cx)$

$(Ex){\sim}(Hx\longrightarrow Ax)v(Ex){\sim}(Ax\longrightarrow Cx)\ .v.\ (Ex)$
$(Hx\longrightarrow Cx)$

S′ $(Ex)\ (Hx\ .{\sim}Ax)\ v\ (Ex)\ (Sx\ .{\sim}Cx)\ .v.\ (Ex)\ ({\sim}HxvCx)$

S'_p $(H\ .{\sim}\cancel{A})\ v\ (A.{\sim}\cancel{C})\ .v.\ ({\sim}H.C)$

$HvAv{\sim}HvC$

S es válida

(7) S $(x)(Mx.Rx.\longrightarrow.{\sim}Tx)\ .\ (x)\ (Mx.Rx.\longrightarrow.Px)$
$.\longrightarrow.\ (Ex)(Mx.\ Px.{\sim}Tx)$

${\sim}((x)(Mx.Rx.\longrightarrow.{\sim}Tx)\ .\ (x)(Mx.Rx.\longrightarrow.Px))$
$v\ (Ex)\ (Mx.Px.{\sim}Tx)$

${\sim}(x)\ (Mx.Rx.\longrightarrow.{\sim}Tx)\ v{\sim}(x)\ (Mx.Rx.\longrightarrow.Px)$
$.v.\ (Ex)\ (Mx.Px.{\sim}Tx)$

$(Ex)\sim(Mx.Rx. \longrightarrow . \sim Tx)$ v $(Ex)\sim(Mx.Rx . \longrightarrow .Px)$
$.v. (Ex)\ (Mx.Px.\sim Tx)$

S´ $(Ex)\ (Mx.Rx.Tx)$ v $(Mx.Rx.\sim Px)$ $.v.$ $(Ex)(Mx.Px.\sim Tx)$

$(M.R.T)$ v $(M.R.\sim P)$ $.v.$ $(M.P.\sim T)$

$((M.R.T)$v $(M.R.\sim P)\ )$ v $(M.P.\sim T)$

$(M.R)\ .\ (Tv\sim P)\ .v.\ (M.P.\sim T)$

$((M.R)$ v $(M.P.\sim T))\ .\ (Tv\sim P)$ v $(M.P.\sim T)$

$((M.R)$ v $(M.P.\sim T))\ .\ (Tv\sim PvM)$

$(M.R)\ .\ (Tv\sim Pvm).v.\ (M.P.\sim T)\ .\ (Tv\sim PvM)$

$(M.R)$ v $(M.P.\sim T)$

$(MvM)\ .\ (Mv\sim T)\ .\ (MvP)\ .\ (RvM)\ .\ (RvP)\ .\ (Rv\sim T)$

S no es válida.

S´ $(x)(Rx \longrightarrow \sim Mx(.(x)(Px. \longrightarrow RxvMx).(x) \sim Rx. \longrightarrow .$
$(Ex)(\sim Pxv\ \ Mx)$

$\sim ((x)(Rx \longrightarrow \sim Mx).(x)(Px. \longrightarrow .RxvMx).(x) \sim$
$\sim Rx). \longrightarrow .(Ex)(\sim Pxv \sim Mx)$

$\sim (x)(Rx \longrightarrow\ Mx)v \sim (x)(Px. \longrightarrow .RxvMx)v \sim (x)$
$\sim Rx.v.(Ex)(\sim Pxv \sim Mx)$

$(Ex)\sim (Rx \longrightarrow \sim Mx)v(Ex) \sim (Px.\ \ .RxvMx)v(Ex)$
$(Rx.v.(Ex)(\sim Pxv \sim Mx)$

S´ $(Ex)(Rx.Mx)v(Ex)(Px. \sim Mx)v(Ex)Rx.v.(Ex)(\sim Pxv\sim Mx)$

$S´_p$ $(\cancel{R}.\cancel{M})v(\cancel{P}. \sim \cancel{R}. \sim M)\ vR.v.(\sim Pv \sim M)$

$\sim MvRv\sim Pv\sim M$

S no es válida

(9) S $(x)\ (Fx. \longrightarrow .Gx. \sim Hx)\ .\ (x)\ (Gx \longrightarrow Dx). \longrightarrow .$
$(Ex)(Fx.Dx)$

$\sim ((x)(Fx. \longrightarrow .Gx. \sim Hx)\ .\ (x)(Gx \longrightarrow Dx))v$
$(Ex)(Fx.Dx)$

$\sim (x)(Fx. \longrightarrow .Gx. \sim Hx)$ v $\sim (x)(Gx \longrightarrow Dx).v.$
$(Ex)(Fx.Dx)$

$(Ex) \sim (Fx. \longrightarrow .Gx. \sim Hx)$ v $(Ex) \sim (Gx \longrightarrow Dx)$
$.v.(Ex)(Fx.Dx)$

$(Ex) \sim(\sim Fx..v.Gx.\sim Hx)\ \ )$ v $(Ex) \sim (\sim GxvDx)$
$.v.(Ex)(FxvDx)$

$(Ex)(Fx. \sim (Gx. \sim Hx))v(Ex)(Gx. \sim Dx).v.(Ex)(FxvDx)$

S´ $(Ex)(Fx. \sim GxvHx)v(Ex)(Gx. \sim Dx).v.(Ex)(FxvDx)$

S'_p $(F.\sim G \vee H)(G.\sim D)\ .\vee.\ (F \vee D)$

$((F.\sim G\vee H)\vee(G.\sim D))\vee(F.D)$

$((F\vee G).(F\vee\sim D).(\sim F\vee H\vee G).(\sim G\vee H\vee D))$

$(F\vee G\vee F)\ .\ (F\vee\sim D\vee F)\ .\ (F\vee\sim D\vee D)\ .$

$(\sim G\vee H\vee G\vee F)\ .\ (\sim G\vee H\vee G\vee D).\ (\sim G\vee H\vee\sim D\vee F)\ .($

$(\sim G\vee H\vee\sim D\vee D)$

S no es válida

(10) S $(x)(WxDx)\ .\ (x)(\sim Hx.\sim Wx)\ .\rightarrow.\ (Ex)(\sim Wx\vee\sim(Dx.Hx))$

$\sim((x)(Wx.Dx)\ .\ (x)(\sim Hx.\sim Wx))\ .\vee.(Ex)(\sim Wx\vee\sim(Dx.Hx))$

$\sim(x)(Wx.Dx)\vee\sim(x)(Hx.\sim Wx)\ .\vee.\ (Ex)(\sim Wx\vee\sim(Dx.Hx))$

$(Ex)\sim(Wx.Dx)\vee(Ex)\sim(\sim Hx.\sim Wx)\ .\vee.\ (Ex)(\sim Wx\vee\sim Dx\vee\sim Hx)$

S' $(Ex)(\sim Wx\vee\sim Dx)\vee(Ex)(Hx\vee Wx).\vee.(Ex)(\sim Wx\vee\sim Dx\vee\sim Hx)$

S'_p $(\sim W\vee\sim D)\vee(H\vee W)\ .\vee.\ (\sim W\vee\sim D\vee\sim H)$

s es válida

SOBRE LA FORMA III

(1) $(x)(Mx\rightarrow\sim Px)\ .\ (x)(Hx\rightarrow Mx)\ .\rightarrow.\ (x)(Hx\rightarrow\sim Px)$

$\sim((x)(Mx\rightarrow\sim Px)\ .\ (x)(Hx\rightarrow Mx))\vee(x)(Hx\rightarrow\sim Px)$

$\sim(x)(Mx\rightarrow\sim Px)\vee\sim(x)(Hx\rightarrow Mx)\ .\vee.\ (x)(Hx\rightarrow\sim Px)$

$(Ex)\sim(Mx\rightarrow\sim Px)\vee(Ex)\sim(Hx\rightarrow Mx)\ .\vee.\ (x)(Hx\rightarrow\sim Px)$

S' $(Ex)(Mx.Px)\vee(Ex)(Hx.\sim Mx)\ .\vee.\ (x)(\sim Hx\vee\sim Px)$

S'_p $(\cancel{M}.P)\vee(\cancel{H}.\ M)\vee(\sim H\vee\sim P)$

S es válida

(2) S $(x)(Dx\rightarrow Cx)\ .\ (Ex)(Ax.Dx).\rightarrow.(Ex)(Ax.Cx)$

$\sim((x)(Dx\rightarrow Cx)\ .\ (Ex)(Ax.Dx))\vee(Ex)(Ax.Cx)$

$\sim(x)(Dx\rightarrow Cx)\vee\sim(Ex)(Ax.Dx).\vee.(Ex)(ax.Cx)$

$(Ex)\sim(Dx\rightarrow Cx)\vee(x)\sim(Ax.Dx).\vee.(Ex)(Ax.Cx)$

S' $(Ex)(Dx.\sim Cx)\vee(x)(\sim Ax\vee\sim Dx).\vee.(Ex)(Ax.Cx)$

S'_p $(\cancel{D}.\sim C)\vee(\sim A\vee\sim D)\vee(\cancel{A}.C)$

Cv Av DvC

S es válida

(3) S $(Ex)(Cx.Ax) . (Ex)(Dx.Ax) . \longrightarrow .(Ex)(Cx.Dx)$

$\sim((Ex)(Cx.Ax). (Ex)(Dx.Ax)) v (Ex)(Cx.Dx)$

$\sim(Ex)(Cx.Ax) v \sim (Ex)(Dx.Ax).v. (Ex)(Cx.Dx)$

$(x)\sim(Cx.Ax) v (x)\sim(Dx.Ax) .v. (Ex)(Cx.Dx)$

S´ $(x) (\sim Cxv\sim Ax) v (x)(\sim Dxv\sim Ax).v. (Ex)(Cx.Dx)$

m = 2:

S'_p $((\sim C_1 v\sim A_1)V(\sim D_2 v\sim A_2)v(\emptyset_1.D_1)v(C_2 vD_2)$

$\sim C_1 v\sim A_1 v \sim D_2 v\sim A_2 vD_1 vC_2$

S no es válida.

(4) S $(x)((FxvSx)\longrightarrow (Ix.Wx))\longrightarrow (x)(Fx\longrightarrow Ix)$

$\sim (x)((FxvSx)\rightarrow (Ix.Wx) v (x)(Fx\rightarrow Ix)$

$(Ex)\sim((FxvSx)\rightarrow (Ix.Wx)) v (x)(Fx\rightarrow Ix)$

$(Ex)((FxvSx) . \sim (Ix.Wx)) v (x) (Fx\rightarrow Ix)$

S´ $(Ex)((FxvSx) . (\sim Ixv\sim Wx)) v (x) (\sim FxvIx)$

S'_p $(FvS) . (\sim Iv\sim W) .v. (\sim FvI)$

$FvSv\sim FvI.\sim Iv\sim Wv\sim FvI$

S es válida

(5) S $(x)((AxvBx)\rightarrow (Cx.Dx)).(x)((CxvEx)\rightarrow ((Fxv\sim Gx)$

$\rightarrow Hx)) . \rightarrow . (x) (Ax\rightarrow (Fx\rightarrow Hx)).$

$\sim ((x)((AxvBx)\longrightarrow (xDx)) . (x)((CxvEx)\longrightarrow ((FxvGx)$

$\rightarrow Hx))Dv (x) (Ax\rightarrow (Fx\rightarrow H))$

$\sim (x)((AxvBx)\rightarrow (Cx.Dx)) v\sim (x)((CxvEx)\rightarrow ((FxG$

$x)\rightarrow Hx)) .v. (x)(Ax\rightarrow (Fx\rightarrow Hx)$

$(Ex)\sim((AxvBx)\rightarrow (CxDx)) v (Ex)\sim((CxvEx)\rightarrow ((Fx$

$vGx)\rightarrow Hx)) .v. (x)(Ax\rightarrow(Fx\rightarrow Hx))$

$(Ex)((AxvBx) .\sim (Cx.Dx)) v (Ex)((CxvEx) .\sim ((Fxvg$

$x)\rightarrow Hx)) .v. (x)(Ax\rightarrow (Fx Hx))$

S´ $(Ex)((AxvBx) . (\sim Cxv\sim Dx)) v (Ex)((CxvEx).((FxvGx)$

$\sim Hx)) .v. (x)(\sim Axv\sim FxvHx))$

S'_p $((AvB).(\sim C\sim D)) v ((CvE) . ((FvG) .\sim H)$

$.v. (\sim Av\sim FvH)$

$((AvB).(\sim Cv\sim D))v ((CvE) . (FvG) .\sim H) v$

$(\sim Av\sim FvH)$

$((AvB) . (\sim Cv\sim D)) v ((CvEv\sim Av\sim FvH) . (FvGv\sim Av\sim F$

$vH))$

$$(AvBvCvEv\sim Av\sim FvH)\ .\ (AvBvFvGv\sim Av\sim FvH)\ .\ (\ Cv \sim DvCvEv\sim Av\sim FvH).(\sim Cv\sim DvFvGv\sim Av\sim FvH)$$

S es válida

(6) S $(Ex)\ Hx.\ (Ex)\sim Hx\ .\longrightarrow .\ (Ex)(Hx.\sim Hx)$

$\sim((Ex)\ Hx\ .\ (Ex)\sim Hx)\ v\ (Ex)(Hx\ .\sim Hx)$

$\sim(Ex)\ Hx.v.\sim(Ex)(Hx.\sim Hx)$

S′ $(x)\sim Hxv\sim(x)\sim Hx\ .v.\ (Ex)(Hx.\sim Hx)$

S'_p $\sim H_1 vH_2 .v.\ (\cancel{H}_1\ .\sim\cancel{H}_1)\ v\ (\cancel{H}_2\ .\sim\cancel{H}_2)$

$H_1 vH_2$

S no es válida

(7) S $(x)(Dx\longrightarrow\sim Wx)\ .\ (x)(Ox\longrightarrow Wx)\ .\ (x)(Px\longrightarrow Dx.\longrightarrow .$
$(x)(Px\longrightarrow\sim Ox)$

$\sim((x)(Dx\longrightarrow\sim Wx)\ .\ (x)(Ox\longrightarrow Wx)\ .\ (x)(Px\longrightarrow Dx))$
$v\ (x)(Px\longrightarrow\sim Ox)$

$\sim(x)(Dx\longrightarrow\sim Wx)\ v\sim(x)(Ox\longrightarrow Wx)v\sim(x)(Px\longrightarrow Dx)$
$.v.\ (x)(Px\longrightarrow\sim Ox)$

$(Ex)\sim(Dx\longrightarrow\sim Wx)\ v\ (Ex)\sim(Ox\longrightarrow Wx)\ v\ (Ex)\sim(Px$
$\longrightarrow Dx)\ .v.\ (x)(Px\longrightarrow\sim Ox)$

S′ $(Ex)(Dx.Wx)\ v\ (Ex)(Ox.\sim Wx)\ v\ (Ex)(Px.\ \sim Dx)\ .v.$
$(\sim Pxv\sim Ox)$

$(\cancel{D}\ vW)\ v\ (O\ .\sim\cancel{W})\ v\ (\cancel{P}\ .\sim D)\ .v.\ (\sim Pv\sim O)$

$WvO\ v\sim Dv\sim Pv\sim O$

S es válida.

(8) S $(x)(Ax\longrightarrow Mx)\ .\ (x)(Hx\longrightarrow Ax)\ .\longrightarrow .(x)(Hx\longrightarrow Mx)$

$((x)(Ax\longrightarrow Mx)\ .\ (x)(Hx\longrightarrow Ax))\ v\ (x)(Hx\longrightarrow Mx)$

$(x)\ (Ax\longrightarrow Mx)\ v\sim\ (x)\ (Hx\longrightarrow Ax)\ .v.\ (x)(Hx\longrightarrow Mx)$

$(Ex)\ (Ax\longrightarrow Mx)\ v\ (Ex)\sim(Hx\longrightarrow Ax)\ .v.\ (x)(Hx\longrightarrow Mx)$

S′ $(Ex)\ (Ax.\sim Mx)\ v\ (Ex)\ (Hx.\sim Ax)\ .v.\ (x)(\sim HxvMx)$

S'_p $(A.\sim\cancel{M})\ v\ (\cancel{H}\ .\sim A)\ .\ v\ (\sim HvM)$

$A^v\sim A^v\sim H^vM$

S es válida.

(9) S $(Ex)(Fx.Sx) \rightarrow (x)(mx \rightarrow Wx) \;.\; (Ex)(Mx.\sim Wx) \;.\!\rightarrow\!.\; (x)(Fx \rightarrow \sim Sx)$

$\sim((Ex)(Fx.Sx) \rightarrow (x)(Mx \rightarrow Wx) \;.\; (Ex)(Mx.\sim Wx))v\, (x)(Fx \rightarrow \sim Sx)$

$\sim((Ex)(Fx.Sx) \rightarrow (x)(Mx \rightarrow Wx).v.\sim(Ex)(Mx.\sim Wx) \;:v:\; (x)(Fx \rightarrow \sim Sx)$

$(Ex)(Fx.Sx) \;.\sim(x)(Mx \rightarrow Wx) \;.v.\; (x) \sim (Mx \;.\sim Wx) \;:v:\; (x)\; (Fx \rightarrow \sim Sx)$

$(Ex)(Fx.Sx) \;.\; (Ex) \sim (Mx \rightarrow Wx) \;.v.\; (x)(\sim MxvWx) \;:v:\; (x)(Fx \rightarrow \sim Sx)$

S′ $(Ex)(F.Sx) \;.\; (Ex)(Mx.\sim Wx) \;.v.\; (x)(\sim MxvWx) \;:v:\; (x)(\sim Fxv \sim Sx)$

$(Ex)(Fx.Sx)\; v\; (x)((\sim MxvWx)\; v\; (x)(\sim Fxv \sim Sx) \;.\; (Ex)(Mx. \sim Wx)\; v\; (x)(\sim MxvWx)\; v\; (x)(\sim Fxv \sim Sx)$

$(F_1 \;.\; S_1)\; v\; (F_2 \;.\; S_2)\; v\; (\sim F_1\; v \sim S_1)\; v\; (\sim M_2 v W_2) \;.\; (M_1 \;.\sim W_1)\; v\; (\sim W_1 v W_1)\; v\; (\sim F_2\; v \sim S_2)$

$S_1\; v \sim S_1 \qquad \sim W_1 v W_1$

S es válida

(10) S $(x)(Gx \rightarrow Hx) \;.\; (Ex)(Fx.Gx) \;.\!\rightarrow\!.\; (Ex)(Fx.\sim Hx)$

$\sim((x)(Gx \rightarrow \sim Hx) \;.\; (Ex)(Fx.Gx))\; v\; (Ex)(Fx. \sim Hx)$

$\sim(x)\; (Gx \rightarrow \sim Hx) v \sim (Ex)(Fx.Gx) \;.v.\; (Ex)(Fx. \sim Hx)$

$(Ex) \sim (Gx \rightarrow \sim Hx)\; v\; (x) \sim (Fx.Gx) \;.v.\; (Ex)(Fx. \sim Hx)$

S′ $(Ex)(Gx.Hx)\; v\; (x)\; (\sim Fxv \sim Gx) \;.v.\; (Ex)(Fx. \sim Hx)$

S'_p $(\cancel{G}.H)\; v\; (\sim Fv \sim G)\; v\; (\cancel{F} \;. \sim H)$

$H^v \sim F^v \sim G^v \sim H$

S es válida

2. REGLAS DECISORIAS PARA LAS FORMULAS NO BASICAS

Antes de prescribir las reglas decisorias para este tipo de fórmulas, previamente las dividiremos en dos clases: fórmulas complejas y fórmulas en forma normal prenexa y, trataremos de definirlas a cada una con la mayor claridad y rigor posible. Cabe advertir aqui, que está distinción de dos clases de fórmulas no básicas es puramente metodológica.

I. FORMULAS COMPLEJAS

Una fórmula compleja monádica es aquella fórmula de la forma $Q_1x_1 \ldots Q'_nx_nA$, $1 \leq i \leq n$, donde cada Q_ix_i es o bien un "(x)" o bien un "(Ex)", $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, y A además de contener cuando menos una ocurrencia de x_i, contiene también cuando menos un cuantificador. Hablando de un modo más simple y a la vez general, fórmula compleja monádica es aquella fórmula cuantificada que además de comprender únicamente letras predicativas monádicas en su operando, comprenden además cuando menos a una cuantificación también de letras predicativas monádicas.

Ahora bien, toda fórmula monádica compleja S_1 es reductible a otra fórmula equivalente básica S´. Por tanto, una fórmula monádica compleja S_1 será lógicamente válida únicamente si hay otra fórmula equivalente básica S´. El método para reducir a cualquier fórmula monádica compleja S_1 a otra equivalente básica S´es como sigue:

Sea n ($n \geq 1$) el número de cuantificadores que no sean únicamente los de su propio operando. Para reducir a una fórmula S_1 que contiene a estos n cuantificadores a una fórmula equivalente básica S´es suficiente con proceder sucesivamente de acuerdo a las siguientes reglas:

1.- Hallar yna fórmula equivalente S eliminando a todas las conectivas "$\longrightarrow$", "$\longleftrightarrow$", etc., mediante definiciones, a fin de que aparezcan únicamente "v", "." y/o "$\sim$", internada esta última.

2.- Empleando las siguientes equivalencias cuantas veces sea necesaría

$$(1) \qquad Av(x)Fx. \Longleftrightarrow .(x)(AvFx)$$

$$(2) \qquad A.(x)Fx. \Longleftrightarrow .(x)(A.Fx)$$

$$(3) \qquad Av(Ex)Fx. \Longleftrightarrow .(Ex)(AvFx)$$

(4) A. (Ex) Fx. $\longleftrightarrow$. (Ex) (A.Fx)

internar a todos los n cuantificadores empezando por el orden mínimo, es decir, por el cuantificador cuyo operando comprenda el mínimo número de cuantificadores, hasta conseguir internar progresivamente a todos los demás cuantificadores. De este modo, una vez internado el cuantificador de orden n, s_1 (y por tanto, S) se habrá reducido a una fórmula básica equivalente, pero aún falta modificar un detalle en esta fórmula así conseguida, la cual se hará en el siguiente paso.

Es preciso indicar que, la única restricción al uso de las equivalencias (1) - (4) es que x no debe estar libre en A, aunque en presente caso esta indicación es casi por demás, ya que en esta reducción se parte de una fórmula cerrada.

3.- Unificar a todas las variables individuales, de tal modo que, S' no exhiba mas que un sólo tipo de variable individual.

4.- Una vez conseguida S' de este modo, para saber si S_1 es 1-válida es suficiente con aplicar a S' cualesquiera de las reglas R1-R3, según sea el caso.

<u>ALGUNOS EJEMPLOS SOBRE LA APLICACION DE ESTAS REGLAS</u>

(I) S_1

$$(Ey)(x)\ (Fx \rightarrow Cy) \rightarrow (x)(Ey)(Fx \rightarrow Gy)$$
$$\sim (Ey)(x)(Fx \rightarrow Gy)\ \mathrm{v}\ (x)(Ey)(Fx \rightarrow Gy)$$
$$(y)(Ex) \sim (Fx \rightarrow Gy)\ \mathrm{v}\ (x)(Ey)(Fx \rightarrow Gy)$$
$$(y)(Ex)(Fx . \sim Gy)\ \mathrm{v}\ (x)(Ey)(\sim Fx \mathrm{v} Gy)$$
$$(y)((Ex)(Fx, \sim Gy)\ \mathrm{v}\ (\sim Fx\mathrm{v}\ (Ey)Gy)$$
$$(Ex)FX.\ (y) \sim Gy\ .\mathrm{v}.\ (x) \sim Fx\mathrm{v}\ (Ey)\ Gx$$

Unificando las variables: Hallando su FNC:

S'

$$(Ex)Fx.\ (Ex) \sim Gx.\mathrm{v}.\ (x) \sim Fx\mathrm{v}\ (Ex)Gx$$
$$(Ex)Fx\mathrm{v}(x) \sim Fx\mathrm{v}(Ex)\ Gx.(x) \sim Gx\mathrm{v}(x)$$
$$\sim Fx\mathrm{v}\ (Ex)\ Gx$$

S'_p

$$F\mathrm{v} \sim F\mathrm{v}G\ . \sim G_1\ \mathrm{v} \sim F_2\mathrm{v}G_1\mathrm{v}G_2$$

S_1 es válida

(2) S

$$(Ex)(Ey)((Fx\mathrm{v}Gy).Hy) \rightarrow (x)(y)(Fy\mathrm{v}Gx)$$
$$\sim (Ex)(Ey)((Fx\mathrm{v}Gy).Hy)\ \mathrm{v}\ (x)(y)(Fy\mathrm{v}Gx)$$
$$(x)(y) \sim ((Fx\mathrm{v}Gy).Hy)\ \mathrm{v}\ (x)\ (y)(Fy\mathrm{v}Gx)$$
$$(x)(y)(\sim(Fx\mathrm{v}Gy)\ \mathrm{v} \sim Hy)\ \mathrm{v}\ (x)(y)(Fy\mathrm{v}Gx)$$
$$(x)(y)((\sim Fx. \sim Gy)\ \mathrm{v} \sim Hy)\ \mathrm{v}\ (x)(y)(Fy\mathrm{v}Gx)$$
$$(x)(y)(\sim Fx\mathrm{v} \sim Hy. \sim Gy\mathrm{v} \sim Hy)\ \mathrm{v}\ (x)(y)(Fy\mathrm{v}Cx)$$

$(x)((y)(\sim Fxy\ \sim Hy).(y)(\sim Gyv\ \sim Hy)).v.(y)Fyv(x)Gx$

$(x)\sim Fxv(y)\sim Hy.(y)(\sim Gyv\ \sim Hy).v.(y)Fyv(x)Gx$

S' $(x)\sim Fxv(x)\sim Hx.(x)(\sim Gxv\ \sim Hx).v.(x)Fxv(x)Gx$

S'_p $\sim F_1 v \sim H_2.\ (\sim G_3 v \sim H_3)vF_4vG_5$

S_1 no es válida.

(3) S_1 $\sim(Ey)(Fy \rightarrow (x)Fx) \rightarrow (Ey)(Fy \rightarrow (x)Fx)$

$\sim(\sim(Ey)(Fy \rightarrow (x)Fx))\ v\ (Ey)(Fy \rightarrow (x)Fx)$

$(Ex)(\sim Fyv(x)Fxv(Ey)(\sim Fyv(x)Fx)$

$(Ey)\sim Fyv(x)Fx.v.(Ey)\sim Fyv(x)Fx$

S'_p $(Ex)\sim Fxv(x)Fx.v.(Ex)\sim Fxv(x)Fx$ Simplificando

$(Ex)\sim Fxv(x)Fx$

FvF
T

S_1 es válida

(4) S_1 $(x)((Bx.Yx) \rightarrow ((y)((Yy.By) \rightarrow Ry) \rightarrow Rx))$

$(x)(\sim(Bx.Yx)v(\sim(y)\sim(Yy.By)vRy)vRx))$

$(x)((\sim Bxv\ \sim Yx)v((Ey)\sim(\sim Yy.By)vRy)vRx))$

$(x)((\sim Bxv\ \sim Yx)v((Ey)((Yy.By)vRy)vRx))$

$(x)((\sim Bxv\ \sim YxvRx)v(Ey)(Yy.By.v.Ry))$

$(x)(\sim Bxv\ \sim YxvRx)v(Ey)(Yy.By.v.Ry)$

S' $(x)(\sim Bxv\ \sim YxvRx)v(Ex)(Yx.Bx.v.Rx)$

S'_p $(Bv \sim YvR)\ v\ (Y.\cancel{B}.v.R)$

S_1 es válida.

(5) S_1 $(x)(((Ox.Px) \rightarrow (CxvMx)) \rightarrow (Ey)((Cy.Py)v(Ez)$
$(MzvPz)))$

$(x)(\sim(\sim(Ox.Px)v(CxvMx))v(Ey)((Cy.Py)v(Ez)$
$(MzvPz)))$

$(x)(((Ox.Px).\sim(CxvMx))v(Ey)((Cy.Py)v(Ez)(MzvPZ)))$

$(x)((Ox.Px).(\sim Cx.\sim Mx))v(Ey)(Cy.Py)v(Ez)(MzvPz)$

S' $(x)((Ox.Px).(\sim Cx.\sim Mx))v(Ex)(Cx.Px)v(Ex)($
$(MxvPx)$

S'_p $\cancel{((O.P).(\sim C.\sim M)}) \ v\ (\cancel{C.P})v(MvP)$

S_1 no es válido

(6) S_1 $(x)((Sx\cdot Wx) \rightarrow ((y)(Wy \rightarrow Fy) \rightarrow Fx))$

$(x)(\sim(Sx\cdot Wx) \vee (\sim(y)(\sim Wy \vee Fy) \vee Fx))$

$(x)((\sim Sx \vee \sim Wx) \vee ((Ey)\sim(\sim Wy \vee Fy) \vee Fx))$

$(x)((\sim Sx \vee \sim Wx) \vee ((Ey)(Wy\cdot \sim Fy) \vee Fx))$

$(x)((\sim Sx \vee \sim Wx \vee Fx) \vee (Ey)(Wy\cdot \sim Fy))$

$(x)(\sim Sx \vee \sim Wx \vee Fx) \vee (Ey)(Wy\cdot \sim Fy)$

$(x)(\sim Sx \vee \sim Wx \vee Fx) \vee (Ex)(Wx\cdot \sim Fx)$

$(\sim S \vee \sim W \vee F) \vee (W\cdot \sim F)$

$\sim S \vee \sim W \vee F \vee \sim F$

S_1 es válida

(7) S_1 $(Ex)(Ey)((Fx \vee Gy)\cdot Hy) \rightarrow (x)(y)(Fy \vee Gx)$

$\sim (Ex)(Fx \vee Gy)\cdot Hy) \vee (x)(y)(Fy \vee Gx)$

$(x)(y)\sim (Fx \vee Gy) \cdot Hy) \vee (x)(y)(Fy \vee Gx)$

$(x)(y)(\sim (Fx \vee Gy) \vee \sim Hy) \vee (x)(y)(Fy \vee Gx)$

$(x)(y)((\sim Fx\cdot \sim Gy) \vee \sim Hy) \vee (x)(y)(Fy \vee Gx)$

$(x)\ (y)((\sim Fx \vee \sim Hy) \cdot (\sim Gy \vee Hy)) \vee (x)(y)(Fy \vee Gx)$

$(x)((y)(\sim Fx \vee \sim Hy) \cdot (y)(\sim Gy \vee \sim Hy) \vee (x)((y)F$

$y \vee Gx)$

$(x)((y)(\ Fx \vee \ \ Hy) \cdot (y)(\ \ Gy \vee \ \ Hy) \cdot (x)((y)$

$(Fy \vee Gx)$

$(x)(\sim Fx \vee (y)\sim Hy) \cdot (y)(\sim Gy \vee \sim Hy) \cdot \vee \cdot (y)Fy \vee (x)$

Gx

$(x)\sim Fx \vee (y)\sim Hy\cdot\ (y)(\sim Gy \vee \sim Hy) \cdot \vee \cdot (y)Fy \vee (x)Gx$

S' $(x)\sim Fx \vee (x)\sim Hx\cdot (x)(\sim Gx \vee \sim Hx) \cdot \vee \cdot (x)Fx \vee (x)Gx$

S'_p $\sim F_1 \vee \sim H_2 \cdot \sim G_3 \vee \sim H_3 \vee \cdot F_4 \vee G_5$

$\sim F_1 \vee \sim H_2 \vee F_4 \vee G_5 \cdot \sim G_3 \vee \sim H_3 \vee F_4 \vee G_5$

S_1 no es válida

(8) S $(x)((Tx\cdot Ax) \rightarrow ((Ey)(Gy\cdot Cy) \rightarrow Sx))$

$(x)(\sim(Tx\cdot Ax) \vee (\sim (Ey)(Gy\cdot Cy) \vee Sx))$

$(x)((\sim Tx \vee \sim Ax) \vee ((y)\sim (Gy\cdot Cy) \vee Sx))$

$(x)((\sim Tx \vee \sim Ax) \vee ((y)(\sim Gy \vee \sim Cy) \ \ Sx))$

$(x)((\sim Tx \vee \sim Ax) \vee ((y)(\sim Gy \vee \sim Cy))$ ''

$(x)(\sim Tx \vee \sim Ax \vee Sx) \vee (y)(\sim Gy \vee \sim Cy)$

S' $(x)(\sim Tx \vee \sim Ax \vee Sx) \vee (x)(\sim Gx \vee \sim Cx)$

S'_p $(\sim T_1 \vee \sim A_1 \vee S_1) \vee (\sim G_2 \vee \sim C_2)$

S_1 no es válida

(9) S_1 $(x)(Mx \rightarrow ((y)(Py \rightarrow Vy) \rightarrow Mx))$

$(x)(\sim Mx \vee (\sim (y)(\sim Py \vee Vy) \vee Mx))$

$(x)(\sim Mx \vee ((Ey) \sim (\sim Py \vee Vy) \;\; \vee Mx))$

$(x)(\sim Mx \vee ((Ey)(Py \; . \sim Vy) \vee Mx))$

$(x)((\sim Mx \vee Mx) \; \vee \; (Ey)(Py \; . \sim Vy))$

$(x)(\sim Mx \vee Mx) \; \vee \; (Ey)(Py . \sim Vy)$

$(x)(\sim Mx \vee Mx) \; \vee \; (Ex)(Px . \sim Vx)$

$(\sim M \vee M) \; \vee \; (\cancel{P . \sim V})$

T

S_1 es válida

(10) S_1 $(x)((Px . (z)(Px \rightarrow \sim Rx)) \rightarrow (y)(Py \rightarrow Hx))$

$(x)(\sim (Px . (z)(\sim Pzv \sim Rx)) \; \vee \; (y)(\sim Py \vee Hx))$

$(x)((\sim Px \vee \sim (z)(\sim Pz \vee \sim Rx)) \; \vee \; (y)(\sim Py \vee Hx))$

$(x)((\sim Px \vee (Ez) \sim (\sim Pz \vee \sim Rx)) \; \vee \; (y)(\sim Py \vee Hx))$

$(x)((\sim Px \vee \; (Ez)(Pz . Rx)) \; \vee \; (y) \; (\sim Py \vee Hx))$

$(x)((\sim Px . \vee . (Ez) \; Pz . Rx) \; \vee \; (y) \sim Py \vee Hx)$

$(x)((\sim Px \vee Hx . \vee . (Ez) Pz . Rx) \; \vee \; (y) \sim Py)$

$(x)((\sim Pz \vee Hx \vee (Ez) Pz . \sim Px \vee Hx \vee Rx) \; \vee \; (y) \sim Py)$

$(x) \; (\sim Px \vee Hx \vee (Ez) Pz . \sim Px \vee Hx \vee Rx) \; \vee \; (y) \sim Py .$

$(x)(\sim Px \vee Hx \vee (Ez) Pz) \; . \; (x)(\sim Px \vee Hx \vee Rx) \; . \vee . \; (y)$
$\sim Py$

$(x)(\sim Px \vee Hx) \; \vee \; (Ez) Pz . (x)(\sim Px \vee Hx \vee Rx) \; . \vee . \; (y)$
$\sim Py$

S' $(x)(\sim Px \vee Hx) \;\; \vee \;\; (Ex) \; Px . \; (x) \; (\sim Px \vee Hx \vee Rx) . \vee .$
$(x) \sim Px$

$(x)(\sim Px \vee Hx) \; \vee \; (Ex) Px \vee \; (x) \sim Px . \; (x)(\sim Px \vee Hx \vee$
$Rx) \; \vee \; (x) \sim Px$

S'_p $(\sim P_1 \vee H_1) \vee P_1 \vee P_2 \vee \sim P_2 . \; (P_1 \vee H_1 \vee R_1)$
$\vee \sim P_2$

S_1 no es válida.

II. FORMAS NORMALES PRENEXAS

Se dice que una fórmula, digamos S_1, está en forma normal prenexa, cuando S_1 es de la forma $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n$, donde cada $Q_i x_i$ es o "(x)" o "(Ex)", $x_i \neq x_j$, y A contiene cuando menos una ocurrencia de cada x_i y en contraste a las fórmulas complejas A no contiene ningún cuantificador. Por tanto, una forma normal prenexa es aquella fórmula que consiste en una secuencia de cuantificadores - llamado "prefijo" - seguida inmediatamente de una fórmula abierta -llamada "matriz".

Ahora bien, dada una fórmula cualquiera, en forma normal prenexa, hay dos maneras diferentes de determinar su validez de acuerdo al algoritmo propuesto en la presente tesis: directamente, o reduciendo a una fórmula básica equivalente.

A) Las reglas para determinar directamente la validez de una fórmula S_1 cualquiera en forma normal prenexa, son las siguientes:

(1) Eliminar de la matriz de S_1, mediante definiciones conocidas a todas las conectivas "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$", etc., de tal modo que, las únicas conectivas que aparezcan en ella sean únicamente "v" , "." y/o "$\sim$". internada esta última.

(2) De acuerdo al tipo de prefijo de S_1 resultante del paso anterior prosígase como sigue:

a) Si el prefijo de S_1 está integrado únicamente por U-cuantificadores, bórrese al prefijo y aplíquese la regla R1 identificando a cada U-operando por su variable individual.

b) Si el prefijo de S_1 está integrado úniaamente por E-cuantificadores, bórrese al prefijo y aplíquese la regla R2 a su matriz.

c) Si el prefijo de S_1 está integrado por U- y E-cuantificadores, bórrese al prefijo y hállese la FNC de la matriz (siempre que en el prefijo el número de los U-cuantificadores sea ≥ 2, y únicamente en ese caso), y aplíquesela regla R3, identificando a cada operando por su variable individual.

B) Para determinar la validez de S_1 reduciendo a otra fórmula equivalente básica S', es suficiente con aplicar el método de reducción de fórmulas complejas a fórmulas básicas - ya que S_1 no es mas un tipo de fórmula no básica- prescrita en la primera parte de - esta sección.

ALGUNOS EJEMPLOS DE LA APLICACION DE ESTAS REGLAS DE ACUERDO AL PRIMER METODO.

(1) S_1 $(Ex)\ (y)\ ((Fx.Gx) \rightarrow Fy)$

$(Ex)\ (y)\ (\sim (Fx.Gx)vFy)$

$(Ex)\ (y)\ (\sim Fxv \sim GxvFy)$

$\sim Fv \sim GvF$

S_1 es válida.

(2) S_1 $(Ex)\ (y)\ (z)\ (Eu)\ (Fx. \sim Gy. v. \sim FzvGu)$

Borrando el prefijo y hallando la FNC:

$Fxv \sim FzvGu. \sim Gyv \sim FzGu$

$Fv \sim FvG.G_1 v \sim G_1 vG_2$

S_1 es válida.

(3) S_1 $(x)\ (y)\ (z)\ (u)\ ((FxvGy.Hy) \rightarrow (\sim Fz \rightarrow Gu))$

$(x)\ (y)\ (z)\ (u)\ (\sim (FxvGy.Hy)v(FzvGu))$

$(x)\ (y)\ (z)\ (u)\ (\sim (FxvGy)v \sim Hy)v(FzvGu))$

$(x)\ (y)\ (z)\ (u)\ (((\sim Fx. \sim Gy)v \sim Hy)v(FzvGu))$

$(\sim F_1 . \sim G_2 . v. \sim H_2)v(F_3 vG_4)$

$(\sim F_1 v \sim H_2 . \sim G_2 v \ H_2)v(F_3 vG_4)$

S_1, patentemente no es válido.

(4) S_1 $(Ex)\ (y)(Ez)(u)((Fx.Gy) \rightarrow (Fz.Gu))$

$(Ex)\ (y)(Ez)(u)(\sim (Fx.Gy)v(Fz.Gu))$

$(Ex)\ (y)(Ez)(u)((\sim Fxv \sim Gy)v(Fz.Gu))$

$(\sim Fxv \sim GyvFz).(\sim Fxv \sim GyvGu)$

$(\sim Fv \sim GvF).(\sim F_1 vF_2 v \sim G_1 vG_2)$

S_1 no es válida.

(5) S_1 $(Ex)(Ey)(Ez)(Et)(Ew)(Eu)(Fx \rightarrow Gy.Gz \rightarrow Ht. \rightarrow .Fw \rightarrow Hu)$

$(\sim (Fx \rightarrow Gy.Gz \rightarrow Ht)v(\sim FwvHu))$

$(\sim (Fx \rightarrow Gy)v \sim (Gz \rightarrow Ht).v.(\sim FwvHu))$

$(Fx.\sim Gy)v(Gz.\sim Ht).v.(\sim FwvHu)$

$(\cancel{F}.\sim G)v(\cancel{G}.\sim H)v(\sim FvH)$

$\sim Gv\sim Hv\sim FvH$

S_1 es válida.

DE ACUERDO AL SEGUNDO METODO

(1) S_1 $(x)\ (y)\ (Ux \rightarrow Rx) \rightarrow (Uy \rightarrow My))$

$(x)\ (y)\ (\sim (Ux \rightarrow Rx)v(\sim UyvMy))$

$(x)\ (y)\ ((Ux.\sim Rx)v(\sim UyvMy))$

$(x)\ ((Ux.\sim Rx)v(y)\ (\sim UyvMy))$

$(x)(Ux.\sim Rx)v(y)(\sim UyvMy)$ Unificando las "x's":

S' $(x)\ (Ux.\sim Rx)v(x)(\sim UxvMx)$ Aplicando Rl:

S'_p $(U_1.\sim R_1)v(\sim U_2vM_2)$

S_1 no es válida.

(2) S_1 $(x)(y)\ (Ez)\ (Lx \rightarrow ((Py.My) \rightarrow Mz))$

$(x)\ (y)\ (Ez)(\sim Lxv(\sim (Py.My)vMz))$

$(x)(y)(Ez)(\sim Lxv((\sim Pyv\sim M_y)vMz))$ Internando a los cuantif.:

$(x)\sim Lx.v.(y)(\sim Pyv\sim My)v(Ez)Mz$ Unificando las "x's":

S' $(x)\sim Lx.v.(x)(\sim Pxv\sim Mx)v(Ex)Mx$ Aplicando R_3:

S'_p $\sim L_1.v.(\sim P_2v\sim M_2)vM_1vM_2$

$\sim M_2vM_2$

S es válida.

(3) S_1

$$(Ex)\ (y)(z)(Ex \longrightarrow Gy.\ \longrightarrow .Fz \longrightarrow Gz)$$
$$(Ex)\ (y)(z)(\sim(Fx \longrightarrow Gy)\vee(Fz \longrightarrow Gz))$$
$$(Ex)\ (y)(z)(\ (Fx.\sim Gy\ )\vee(\sim Fz\vee Gz)\ )$$
$$(Ex)\ (y)(\ (Fx.\sim Gy)\vee(z)(\sim Fz\vee Gz)\ )$$
$$(Ex)\ (\ (y)\ (Fx.\sim Gy)\vee(z)\ (\sim Fz\vee Gz)\ )$$
$$(Ex)\ ((Fx.(y)\sim Gy)\vee(z)(\sim Fz\vee Gz)\ )$$
$$(Ex)\ (Fx.(y)\sim Gy).\vee.(z)\ (\sim Fz\vee Gz)$$
$$(Ex)\ Fx.(y)\sim Gy.\vee.(z)\ (\sim Fz\vee Gz)$$

S'
$$(Ex)\ Fx.(x)\sim Gx.\vee.(x)\ (\sim Fx\vee Gx)$$
$$(Ex)\ Fx\vee(x)\ (\sim Fx\vee Gx).(x)\sim Gx\vee(x)\ (\sim Fx\vee Gx)$$

S'_p
$$F\vee F\vee G.\ G_1\vee F_2\vee G_2$$

S no es válida.

(4) S_1

$$(Ex)(Ey)(z)(u)(Gx \rightarrow (Cy \rightarrow Gy).\rightarrow .(Pz.Tz.Gz)\rightarrow(Cu\rightarrow Tu))$$
$$(Ex)(Ey)(z)(u)(\sim(Gx \rightarrow (Cy\rightarrow Gy)).\vee.\sim(Pz.Tz.Gz)\vee(Cu\rightarrow Tu))$$
$$(Ex)(Ey)(z)(u)(Gx.\sim(Cy\rightarrow Gy).\vee.(\sim Pz\vee\sim Tz\vee\sim Gz)\vee(\sim Cu\vee Tu))$$
$$(Ex)(Ey)(z)(u)(Gx.(Cy.\sim Gy).\vee.(\sim Pz\vee\sim Tz\vee\sim Gz)\vee(\sim Cu\vee Tu))$$
$$(Ex)(Ey)(Gx.(Cy.\sim Gy).\vee.(z)(u)((\sim Pz\vee\sim Tz\vee\sim Gz)\vee(\sim Cu\vee Tu)))$$
$$(Ex)(Ey)(Gx.(Cy.\sim Gy))\vee(z)(u)((\sim Pz\vee\sim Tz\vee\sim Gz)\vee(\sim Cu\vee Tu))$$
$$(Ex)(Gx.(Ey)(Cy.\sim Gy))\vee(z)(\sim Pz\vee\sim Tz\vee\sim Gz)\vee(u)(\sim Cu\vee Tu))$$
$$(Ex)Gx.(Ey)(Cy.\sim Gy).\vee.(z)(\sim Pz\vee\sim Tz\vee\sim Gz)\vee(u)(\sim Cu\vee Tu)$$
$$(Ex)Gx.(Ex)(Cx.\sim Gx).\vee.(x)(\sim Px\vee\sim Tx\vee\sim Gx)\vee(x)(\sim Cx\vee Tx)$$
$$(Ex)Gx\vee(x)(\sim Px\vee\sim Tx\vee\sim Gx)\vee(x)(\sim Cx\vee Tx).(Ex)(Cx.\sim Gx)\vee$$
$$(x)(\sim Px\vee\sim Tx\vee\sim Gx)\vee(x)(\sim Cx\vee Tx)$$
$$G_1\vee G_2\vee(\sim P_1\vee\sim T_1\vee\sim G_1)\vee(\sim C_2\vee T_2).(C_1.\sim \emptyset_1)\vee(\emptyset_2.\sim G_2)\vee$$
$$(\sim P_1\vee\sim T_1\vee\sim G_1)\vee(\sim C_2\vee T_2)$$
$$G_1\vee G_2\vee\sim P_1\vee\sim T_1\vee\sim G_1\vee\sim C_2\vee T_2.\sim C_1\vee\sim G_2\vee\sim P_1\vee\sim T_1\vee$$
$$\sim G_1\vee\sim C_2\vee T_2$$

S_1 no es válida.

(5) S_1 $(x)(Ey)(Ez)(Fx.Gx. \longrightarrow .Fy.Gz)$

$(x)(Ey)(Ez)(\sim(Fx.Gx)v(Fy.Gz))$

$(x)(Ey)(Ez)((\sim Fxv\sim Gx)v(Fy.Gz))$

$(x)((\sim Fxv\sim Gx)v(Ey)(Ez)(Fy.Gz))$

$(x)(\sim Fxv\sim Gx)v(Ey)(Fy.(Ez)Gz)$

$(x)(\sim Fxv\sim Gx).v.(Ey)Fy.(Ez)Gz$

S' $(x)(\sim Fxv\sim Gx).v.(Ex)Fx.(Ex)Gx$

$(x)(\sim Fxv\sim Gx)v(Ex)Fx.(x)(\sim Fxv\sim Gx)v(Ex)Gx$

$(\sim Fv\sim G)vF.(\sim Fv\sim G)vG$

S_1 es válida.

3. REGLAS DECISORIAS PARA FORMULAS QUE CONTIENEN CONSTANTES INDIVIDUALES.

RI. Sea S una fórmula cuantificacional cualquiera, monádica y cerrada, sin signos de igualdad, con constante individuales, con o sin letras proposicionales, Para determinar su validez, elimínese previamente de esta fórmula a todas las conectivas " $\rightarrow$ ", " $\leftrightarrow$ ", etc. , sustituyendo por sus equivalentes respectivos, hasta reducir a otra fórmula equivalente S´tal que ésta última exhiba únicamente las conectivas "v", "." y/o " $\sim$ ". como siempre, internada ésta última. Si S es una fórmula no básica basta reducirla a otra fórmula equivalente básica aplicando el método de reducción expuesto en la sección inmediata precedente. Ahora bien, una vez lograda la fórmula S,́ esta tendrá cualesquiera de las siguientes formas (enumeradas siguiendo el orden de los teoremas que fundamentan su decidibilidad en las segunda parte de esta tesis):

IV. $(x)A_1 \ldots\ldots (x)A_m, Ca_1, \ldots, Ca_r$

V . $(Ex)B_1, \ldots, (Ex)B_n, Ca_1, \ldots, Ca_r$

VI. $(x)A_1, \ldots, (x)A_m, (Ex)B_1, \ldots, (Ex)B_n, Ca_1, \ldots, Ca_r$

es decir, una secuencia finita de U-fórmulas y fórmulas predicativas que exhiben constantes individuales, o una secuencia finita de E-fórmulas y fórmulas predicativas que exhiben constantes individuales, o una secuencia finita de U- y E-fórmulas y fórmulas predicativas que exhiben constantes individuales. Las reglas para determinar la validez de cualquier fórmula de cualesquiera de estas formas son las siguientes:

R4. Si S´es de la forma $(x)A_1, \ldots, (x)A_m, Ca_1, \ldots, Ca_r$, bórrese a todos los cuantificadores, variables y constantes individuales y, luego:

(1) adscríbase subíndices a las letras predicados de los U-esquemas, conforme a la regla R1.

(2) Empleando subíndices distintos a las anteriores adscríbase un mismo subíndice a todas las letras predicados que provengan de borrar una misma constante individual, y subíndices de distintos a las que provengan de borrar constantes individuales distintas.

(3) S (S', etc.) será 1-válida únicamente, si el esquema S'_p resultante de estas operaciones es veritativo-funcionalmente válida.

R5. Si S' es de la forma $(Ex)B_1 \ldots\ldots (Ex)B_n, Ca_1 \ldots\ldots Ca_r$:

A) Si en S' el número de tipos de letras constantes individuales es ≤ 1, y en $(Ex)B_i$ i es $1 \leq i \leq n$. Para determinar la validez de S' bórrese a todos los cuantificadores , variables y constantes individuales, y determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

B) Si en S' el número de tipos de letras constantes individuales es ≥ 2 y el número de E-fórmulas es como en A), para determinar la validez de S' efectúese sucesivamente los siguientes pasos:

1.- Hállase la forma normal conjuntiva de S', tomando a cada $(Ex)B_i$ y Ca_i en bloque, como si fueran letras proposicionales.

2.- Determínese la validez de cada miembro de la FNC hallada, como sigue:

(2.1) Si el miembro de la FNC es de la forma $(Ex)B_1 v \ldots \ldots v\ (Ex)B_n v Ca_1 v \ldots v Ca_r$ (donde r es el cardinal de la variedad de tipos de letras constantes individuales), bórrese a todos los cuantificadores, variables y constantes individuales, y luego

1° sustitúyase a cada E-esquema Bi por la disyunción de r miembros $B_{i_1}\ v \ldots v B_{i_r}$.

2° adscríbase un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada par de fórmulas (B_i, C) usando un subíndice distinto para cada par cuyo miembro C provenga de borrar una constante individual distinta,

3° determínese vertitativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante de estas operaciones.

(2.2) Si el miembro de la FNC es de la forma $Ca_1 v \ldots\ldots v Ca_r$, determínese su validez, aplicando cualquier procedo,ento decisorio proposicional, En la práctica, una vez hallada la FNC, los pasos (2.1) - (2.2) pueden efectuarse simultáneamente.

C) S (S', etc.) será 1-válida únicamente si el esquema S'_p resultante, en cada caso es veritativo-funcionalmente válido.

R6. Si S' es de la forma $(x)A_1 \ldots\ldots (x)A_m$, $(Ex)B_1 \ldots\ldots (Ex)B_n, Ca_1 \ldots Ca_r$, efectúese sucesivamente los siguientes pasos:

(1) Siempre que se considere conveniente y sea posible, redúzcase el número de los cuantificadores, empleando las equivalencias dadas en la regla R3 con este objeto.

(2) Hállese la forma normal conjuntiva de S'.

(3) Determínese la validez de cada miembro de la FNC, como sigue:

(3.1) Si el miembro de la forma normal conjuntiva es de la forma $(x)A_1 v \ldots\ldots v (x)A_m v\ (Ex)B_1 v \ldots\ldots v\ (Ex)B_n v Ca_1 v \ldots\ldots v Ca_r$, donde m, n y r son ≥ 1, bórrese a todos los cuantificadores, variables y constantes individuales, y luego:

1° sustitúyase a cada E-esquema B_i por la disyunción de m + r miembros $B_{i_1}\ v \ldots v B_{i_{m+r}}$, donde r es el cardinal de la variedad de tipos de letras constantes individuales.

2° adscríbase un mismo subíndice a cada par de fórmulas (Bi C), usando un subíndice distinto para cada par cuyo miembro A, es distinto o cuyo miembro C proviene de borrar una constante individual distinta.

3° Determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante de estas operaciones.

(3.2) A los demás miembros de la FNC, aplíquese simplemente las reglas R1-R5, según sea el caso.

(4) S (S', etc.) será 1-válida únicamente si el esquema S'_p resultante es veritativo-funcionalmente válido en cada caso.

ALGUNOS EJEMPLOS DE LA APLICACION DE ESTAS REGLAS

SOBRE LA FORMA IV.

(1) S $(Ex)(\sim Mx v Cx). \sim Ca. \longrightarrow . \sim Ma$

$\sim ((Ex)(\sim Mx v Cx). \sim Ca) v \sim Ma$

$\sim (Ex)(\sim Mx v Cx) v Ca . v . \sim Ma$

$(x) \sim (\sim Mx v Cx) v Ca . v . \sim Ma$

S' $(x)(Mx . \sim Cx) v Ca . v \sim Ma$

S'_p $(M_1 . \sim C_1) v C_2 . v . \sim M_2$

S no es válida.

(2) S $P \longrightarrow (Ex)(Tx.Bx).Ba. \longrightarrow .(Ta \longrightarrow P)$

$\sim (P \longrightarrow (Ex)(Tx.Bx).Ba) v (Ta \longrightarrow P)$

$\sim (P \longrightarrow (Ex)(Tx.Bx)) v \sim Ba.v.(Ta \longrightarrow P)$

$\sim (\sim P v (Ex)(Tx.Bx)) v \sim Ba.v.(\sim Ta v P)$

$P. \sim (Ex)(Tx.Bx) v \sim Ba.v.(\sim Ta v P)$

$P.(x) \sim (Tx.Bx) v \sim Ba.v.(\sim Ta v P)$

S' $P.(x)(\sim Tx v.Bx) v \sim Ba.v.(\sim Ta v P)$

S'_p $P.(\sim T_1 v B_1) v \; B_2.v.(\sim T_2 v P)$

$P v (\sim T_2 \; v P).(\sim T_1 v B_1) v \sim B_2 v (\sim T_2 v P)$

S no es válida.

(3) S $(x)(Hx. \longrightarrow .Px v Dx). \sim P_j .v.(x)(\sim Px \longrightarrow \sim Hx) v$

$\sim D_j$

S' $(x)(\sim Hx v Px v Dx). \sim P_j .v.(x)(Px v \sim Hx) v \sim D_j$

S'_p $\sim H_1 v P_1 v D_1). \sim P_2 .v.(P_3 v \sim H_3) v \sim D_2$

$(\sim H_1 v P_1 v D_1) v (P_3 v \sim H_3) v \sim D_2 . \sim P_2 v (P_3 v \sim H_3) v \sim D_2.$

S no es válida.

(4) S $(Ex)(Mxv\sim Bx).(Ex)(Mx.\sim Bx)v\sim Ma. \rightarrow .Bav\sim Ma$

$\sim((Ex)(Mxv\sim Bx).(Ex)(Mx.\sim Bx)v\sim Ma).v.Bav\sim Ma$

$\sim(Ex)(Mxv\sim Bx)v\sim((Ex)(Mx.\sim Bx)v\sim Ma).v.Bav\sim Ma$

$(x)\sim(Mxv\sim Bx).v.\sim(Ex)(Mx.\sim Bx).Ma.v:Bav\sim Ma$

$(x)(\sim Mx.Bx).v.(x)\sim(Mx.\sim Bx).Ma:v:Bav\sim Ma$

$(x)(\sim Mx.Bx).v.(x)(\sim Mxv\ Bx).Ma:v:Bav\sim Ma$

$(\sim M_1.B_1).v.(\sim M_2vB_2)M_3:v:B_3v\sim M_3$

$(\sim M_1v\sim M_2vB_2).(\sim M_1vM_3).(B_1v\sim M_2vB_2).(B_1vM_3)$
$:v:B_3v\sim M_3$

$(\sim M_1v\sim M_2vB_2vB_3v\sim M_3).(\sim M_1vM_3vB_3v\sim M_3).(B_1v$
$\sim M_2vB_2vB_3v\sim M_3).(B_1vM_3vB_3v\sim M_3)$

S no es válida.

(5) S $Ha \rightarrow (Ex)Hx.Fb \rightarrow (Ex)Fx. \rightarrow .(x)(HxvFx)$

$\sim(Ha \rightarrow (Ex)Hx.Fb \rightarrow (Ex)\ Fx)v(x)(HxvFx)$

$\sim(Hx \rightarrow (Ex)Hx)v\sim(Fb \rightarrow (Ex)Fx).v.(x)(HxvFx)$

$Ha.\sim(Ex)Hx.v.Fb.\sim(Ex)Fx:v:(x)(HxvFx)$

$Ha.(x)\sim Hx.v.Fb.(x)\sim Fx:v:(x)(HxvFx)$

$H_1.\sim H_2.v.F_3.\sim F_4:v:(H_5vF_5)$

Es muy evidente, que S no es válida.

<u>SOBRE LA FORMA V.</u>

(1) S $(x)(Gx \rightarrow Mx).Ga. \rightarrow .Ma$

$\sim(\ (x)(Gx \rightarrow Mx).Ga)\ vMa$

$\sim(x)(Gx \rightarrow Mx)v\sim Ga.v.Ma$

$(Ex)\sim(Gx \rightarrow Mx)v\sim Ga.v.Ma$

$(Ex)(Gx.\sim Mx)v\sim Ga.v.Ma$

$(G.\sim M)v\sim G.v.M$

$\sim Mv\sim GvM$

S es válida.

(2) S $(x)(Tx \rightarrow Vx). \rightarrow .CavPb. \sim Pb: \rightarrow :$
$Cav(Ex)(Tx. \sim Vx)$

$\sim (\sim (x)(\sim TxvVx).v.CavPb. \sim Pb).v.$
$Cav(Ex)(Tx. \sim Vx)$

$(x)(\sim TxvVx). \sim (CavPb. \sim Pb).v.Cav(Ex)$
$(Tx. \sim Vx)$

$(x)(\sim TxvVx). \sim ((CavPb)vPb).v.Cav(Ex)$
$(Tx. \sim Vx)$

$(x)(\sim TxvVx). (\sim Ca. \sim Pb.Pb).v.Cav$
$(Ex)(Tx. \sim Vx)$

$(x)(\sim TxvVx)vCav(Ex)(Tx. \sim Vx) . (\sim Ca. \sim$
$Pb.v.Pb).v.Cav(Ex)(Tx. \sim Vx)$

$(\sim T_1vV_1)vC_2v(\cancel{T}_1 . \sim V_1)\ v\ (T_2 . \sim V_2) . (\sim \not{c}_1. \sim$
$P_2 .v.P_2)vC_1v(T_1. \sim V_1)\ v\ (T_2 . \sim V_2)$

$\sim V_1 \ ^v\ V_1 \quad . \quad \sim P_2 \ ^v\ P_2$

T

S es válida

(3) S $Gr \rightarrow (Ex)(Px.Ix.Fx) . (x)((Px.Ax) \rightarrow$
$Lx). \rightarrow .Gr \rightarrow (Ex)(Px.Ax. \sim Lx)$

$\sim (\sim Grv(Ex)(Px.Ix.Fx) . (x)(\sim (Px.$
$Ax)vLx)). v . \sim Grv(Ex)(Px.Ax. \sim Lx)$

$\sim (\sim Grv(Ex)(Px.Ix.Fx)v \sim (x)(\sim (Px.$
$Ax)vLx).v. \sim Grv(Ex)(Px.Ax. \sim Lx)$

$Gr. \sim (Ex)(Px.Ix.Fx).v.(Ex) \sim (\sim (Px.$
$Ax)vLx):v: \sim Grv(Ex)(Px.Ax. \sim Lx)$

$Gr. (x) \sim (Px.Ix.Fx).v.(Ex)(Px.Ax. \sim$
$Lx):v: \sim Grv(Ex)(Px.Ax. \sim Lx)$

$Gr.(x)(\sim Pxv \sim Ixv \sim Fx).v.(Ex)(Px.$
$Ax. \sim Lx):v: \sim Grv(Ex)(Px.Ax. \sim Lx)$

$Grv \sim Grv(Ex)(Px.Ax. \sim Lx) . (x)(\sim Pxv \sim Ixv \sim Fx)\ v$
$(Ex)(Px.Ax. \sim Lx)\ Grv\ (Ex)(Px.Ax. \sim Lx)$

$Gv \sim Gv\ (\cancel{P.A. \sim L}).(\sim P_1v \sim I_1v \sim F_1)v(P_1.A_1. \sim L_1)\ v\ (\cancel{P_2.}A_2.$
$\cancel{\sim L_2)\ v \sim} G_2\ v\ (P_2 .A_2. \sim L_2)\ v\ (\cancel{P_1.A_1. \sim L_1})$

S no es válida.

(4) S $(x)(Gx. \longrightarrow .Fx.Mx)\ .\ (x)(Mx. \longrightarrow .Ixv$
$Sx)\ .\ Ga. \longrightarrow .(x)(\sim Gxv \sim Mx)$
$\sim((x)(Gx. \longrightarrow .Fx.Mx).(x)(Mx. \longrightarrow .IxvS$
$x).Ga)v(x)(\sim Gxv \sim Mx)$
$\sim (x)(Gx. \longrightarrow .Fx.Mx)v \sim (x)(Mx. \longrightarrow .$
$IxvSx)v \sim Ga.v.(x)(\sim Gxv \sim Mx)$
$(Ex) \sim (Gx. \longrightarrow .Fx.Mx)v(Ex) \sim (Mx. \longrightarrow$
$.IxvSx)v \sim Ga.v.(x)(\sim Gxv \sim Mx)$
$(Ex)(Gx. \sim (Fx.Mx))v(Ex)(Mx. \sim IxvSx))$
$v \sim Ga.v.(x)(\sim Gxv \sim Mx)$

S′ $(Ex)(Gx. \sim Fxv \sim Mx)v(Ex)(Mx. \sim Ixv$
$\sim Sx)v \sim Ga.v.(x)(\sim Gxv \sim Mx)$

S'_p $(\cancel{G}_1 . \sim F_1 v \sim M_1)v(\cancel{G}_2 . \sim I_2 v \sim M_1)$
$v(\cancel{M}_2 . \sim I_1 v \sim S_1)v(\cancel{M}_2 . \sim I_2 v \sim S_2)$
$V \sim G_1 v(\sim G_2 v \sim M_2)$

$\sim F_1 v \sim M_1 v \sim I_2 v \sim M_2 v \sim I_1 v \sim S_1 v \sim I_2$
$v \sim S_2 v \sim G_1 v \sim G_2 v \sim M_2$

S no es válida

(5) S $Pc \longrightarrow (Ex)Px.(x)(Px \longrightarrow Rx).(x)(Px$
$\longrightarrow Fx). \longrightarrow .RcvFc$
$(Pc \longrightarrow (Ex)Px.(x)(Px \longrightarrow Rx).(x)(Px$
$\longrightarrow Fx))\ .v.RcvFc$
$(Pc \longrightarrow (Ex)Px)v \sim (x)(Px \longrightarrow Rx)v \sim$
$(x)(Px \longrightarrow Fx)\ .v.RcvFc$
$(Pc. \sim (Ex)Px.v.(Ex) \sim (Px \longrightarrow Rx).v.$
$(Ex) \sim (Px \longrightarrow Fx):\ v:\ RcvFc$

S′ $Pc.(x) \sim Px.v.(Ex)(Px. \sim Rx).v.(Ex)$
$(Px. \sim Fx)\ :v:\ RcvFc$

$Pcv(Ex)(Px. \sim Rx)v(Ex)(Px. \sim Fx).(x) \sim Pxv(Ex)(Px. \sim Rx)v$
$(Ex)(Px. \sim Fx):v:RcvFc$
$Pcv(Ex)(Px. \sim Rx)v(Ex)(Px. \sim Fx)vRcvFc.(x) \sim Pxv(Ex)(Px.$
$\sim Rx)v(Ex)(Px. \sim Fx)v\ RcvFc$

S'_p $Pv(P. \sim R)\cancel{v(P. \sim F)}vRvF. \sim P_1 v(\cancel{P}_1 .R_1)$
$v(P_2 . \sim \cancel{R}_2)v(\cancel{P_1 . \sim F_1})\ v(P_2 . \sim F_2)vR_2 vF_2$

$PvRvF.\quad P_1 vR_1 vP_2 \quad vF_1 vR_2 vF_2$

S no es válida.

UNA BREVE REFERENCIA A LA PROCEDENCIA DE ALGUNOS EJEMPLOS DE ESTA PRIMERA PARTE.

1.- DE LA REGLA R2

(1) Fórmula demostrado como teorema por B.Mates dentro de - un sistema de derivación, en LOGICA ELEMENTAL, p. 153, Ed. Tecnos, Madrid, 1970.

2.- DE LA REGLA R3

(1) Fórmula demostrado por I. Copi en SYMBOLIC LOGIC, P. 82 The Macmillan Compa y, New York, 1970.

(2) Ibid. p. 83

(3) Ibid. p. 84

(4) Ibid. p. 88

(5) Ibid. p. 89

(6) Fórmula demostrado por p. Suppes en INTRODUCCION A LA LOGICA SIMBOLICA, p. 118. CECSA, México, 1966.

(7) Ibid. p. 94

(8) IbiD. p. 92

(9) Ibid. p. 126

(10) Fórmula demostrado por W. V. O. Quine mediante su proce dimiento decisorio en LOS METODOS DE LA LOGICA, p. 168. - Ariel, Barcelona, 1969.

3.- DE LA REGLA R5

(2) Suppes, Ibid. p. 95

Los demás ejemplos también proceden de estos autores, fundamentalmente de la obra citada de Copi; aunque, los ejemplos de las reglas R1 y R4 son en su totalidad de una construcción arbitraria.

SEGUNDA PARTE

FUNDAMENTOS DEL PROCEDIMIENTO DECISORIO PROPUESTO

En esta parte se presenta la fundamentación de las reglas del procedimiento decisorio propuesto en la presente tesis. Es decir, se trata de demostrar que el conjunto de reglas presentadas en las páginas anteriores constituyen un método efectivo para decidir la validez de cualquier fórmula cuantificacional monádica y cerrada de la Lógica de Primer Orden. Para demostrar esto, es suficiente demostrar

1) Que toda fórmula cuantificacional monádica y cerrada no básica S_1 de la Lógica de Primer Orden es reductible a otra fórmula equivalente básica S'.
2) Que toda fórmula monádica básica y cerrada S' es decidible.

1) Sea S_1 una fórmula cerrada no básica, sin signos de igualdad, con o sin letras proposicionales y/o constantes individuales. De acuerdo a la sección 2 de la Primera Parte una fórmula monádica no básica S_1 puede ser u una fórmula compleja o una fórmula en forma normal prenexa. Por tanto se deberá demostrar que toda fórmula no básica S1 en cualesquiera de estas formas es reductible a otra fórmula básica equivalente S'. Pero esta reductibilidad de fórmulas no básicas a fórmulas básicas ya fue demostrada en la sección 2 a propósito de las reglas decisorias para este tipo de fórmulas. Por tanto, repetir la aqui sería redundante, en cualquier caso, debiendo remetirse, en consecuencia, simplemente a dicha sección.

Ahora bien, una vez reducida una fórmula monádica no básica S_1 a otra fórmula monádica básica equivalente S', esta última podrá ser de cualesquiera de las siguientes formas :

I. $(x)A_1 ,\ldots\ldots, (x)A_m$
II. $(Ex)B_1 ,\ldots\ldots, (Ex)B_n$
III. $(x)A_1 ,\ldots\ldots, (x)A_m, (Ex)B_1 ,\ldots\ldots, (Ex)B_n$
IV. $(x)A_1 ,\ldots\ldots, (x)A_m, Ca_1, \ldots\ldots, Ca_r$
V. $(Ex)B_1 ,\ldots\ldots, (Ex)B_m, Ca_1, \ldots\ldots, Ca_r$
VI. $(x)A_1 ,\ldots\ldots, (x)A_m, (Ex)B_1 ,\ldots\ldots, (Ex)B_n, Ca_1, \ldots, Ca_r$

es decir, fórmulas básicas, donde:

a) Las únicas conectivas proposicionales que interviene son "v", "." y/o "~" internadas ésta última (esto es, afectando únicamente a los esquemas abiertos atómicos).

b) En una fórmula cualquiera $(x)A_i$, $(Ex)B_i$ o Ca_i $i \geq 1$.

c) m,n y r son enteros positivos finitos cualesquiera.

(Claro está que, S´presentaría otras formas más si se tomaran en cuenta a las posibles letras proposicionales que pudieran aparecer en ella, pero la presencia de tales letras es irrelevante, como se verá al final de esta Segunda Parte).

2) Sea S´una fórmula monádica, básica y cerrada, sin signos de igualdad, con o sin letras proporcionales y/o constante individuales, donde las únicas conectivas propocionales que aparecen son "v", "." y/o "~", internada esta última. De acuerdo a la prueba precedente, S´puede adoptar seis formas distintas. Por tanto, para demostrar que toda fórmulas S´de estas características es decidible será suficiente con demostrar que una fórmula cualquiera que posea cualesquiera de aquellas seis formas es decidible. (En consecuencia, para demostrar que cualquier fórmula monádica (en sentido general) es decidible, será suficiente con reducirla a otra fórmula básica equivalente S´eliminando en aquella fórmula a toda conectiva que no sea "v", "." y/o "~" internada esta última, mediante ciertas definiciones conocidas)

La demostración de la decidibilidad de la validez de S´se llevará a cabo mediante seis teoremas correspondientes a las seis formas de esta fórmula, como segui.

<u>TEOREMA I</u>. Sea S´de la forma $(x)A_1, \ldots\ldots, (x)A_m$, donde, como en la página 3 hay un número m (finito), $1 \leq i \leq m$, de U-fórmulas básicas y las únicas conectivas proporcionales que intervienen en esta fórmula son "v", "." y/o "~" internada esta última. Toda fórmula que posea estas características es decidible.

<u>PRUEBA</u>.- Dada cualquier fórmula S´de la forma $(x)A_1, \ldots\ldots, (x)A_m$ hay una fórmula equivalente $S_c´$ en forma normal disyuntiva que se obtiene a partir de las U-fórmulas de S´tomando a cada $(x)A_i$ en bloque como si fuera simplemente una letra proposicional. Sea

$$((x)A_1, \ldots\ldots, (x)A_k)_1 v, \ldots v((x)A_1, \ldots, (x)A_k)_m \qquad S_c´$$

la FND asi obtenida. En esta fórmula, a fin de que la demostración resulte lo más claro y sencillo posible (sin renunciar por ello ni al rigor ni a la generalidad) podemos hacer las siguientes modificaciones. Por un lado, en virtud de la equivalencia $(x)A_1, \ldots, (x)A \Longleftrightarrow$

$(x)\ (A_1.\ldots\ldots A_k)$ transformamos a cada mienbro i de S_c' en una fórmula de la forma $(x)\ (A_1.\ldots\ldots A_k)$ i; por otro lado, en cada mienbro i asi transformado denotaremos a cada operando $(A_1.\ldots.A_k)_i$ solamente con una sola letra mayúscula A. De este modo, S_c' se convierte a otra fórmula esquemáticamente equivalente.

$$(x)A_1 v\ldots v(x)A_m \qquad S_c''$$

Ahora bien, para demostrar que S'es decidible será suficiente con demostrar que cualquier fórmula de la forma S_c'' es decidible; y para demostrar que S_c'' es decidible será suficiente con demostrar que S_c'' es 1- válida si se satisface cuando menos una de las siguientes condiciones:

(i) Que cuando menos una $(x)A_i$ cualquiera sea 1-válida,

(ii) Que cuando menos una $\sim(x)A_i$ implique a una $(x)A_j$.

Por tanto, S_c'' será decidible únicamente si en cualesquiera de estos casos hay algún procedimiento efectivo para determinar su validez.

CASO (i).- Una fórmula $(x)A_i$ cualquiera es 1-válida únicamente si su operando es tautológicamente válido. Esta aserción se sigue de los siguientes básica - por definición - el operando es siempre un esquema abierto, y un esquema abierto en lo que respecta a la validez siempre se comporta exáctamente igual que los esquemas proposicionales. Por tanto, de equi se sigue, que $(x)A_i$ será 1-válida únicamente si su operando A_i es tautológicamente válido. De este modo, será siempre posible saber en S_c'' si alguna fórmula $(x)A_i$ es 1-válida, o no, y en consecuencia si S'es 1-válida o no, para la cual será suficiente con borrar al U-cuantificador de cada $(x)A_i$ en S_c'' y luego manipular veritativo-funcionalmente al operando A_i. Pero además, en el operando A_i podemos borrar tambien a las variables individuales, ya que, como dice Quine en una situación semejante: "...de ello no puede resultar ambiguedad alguna, pues basta con que sobreentendamos una "x" tácita detrás de cada letra mayúscula..."[1]. Por esta razón, en lo sucesivo,. . . . .

1.W.V.O. Quine. LOS METODOS DE LA LOGICA, Segunda Parte, §19,P. 157, 2ª reimpresión, Ediciones Ariel, Barcelona 1969.

tambien en los demás teoremas se procederá en idéntica forma respecto a las variables individuales. Sea S_p' (o S_p'', etc.) el esquema asi- resultante de borrar en una fórmula cuantificada a todos los cuantificadores y variables individuales.

CASO (ii).- Aqui hay los siguientes subcasos:

12.1* Si i=2:

S' . . $(x)A_1 \vee (x)A_2$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

12. m. Si i = m:

S' $(x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \ldots \vee (x)A_m$

12.1.- Aqui supondremos que ningún miembro de la fórmula $(x)A_1 \vee (x)A_2$ es 1-válida individualmente, porque si fuera asi, nos veríamos retrotraídos simplemente, al caso (i). Por tanto, $(x)A_1$ o $(x)A_2$, o ambos serán contingentes o inconsistentes.

(1).- Si $(x)A_1$ y $(x)A_2$ son contingentes ambas, es decir, son fórmulas que no resultan ser verdaderas para todas las interpretaciones de sus variables individuales y letras predicados, sino sólo para algunas y para otras no.- El condicional $\sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_2$ es a su vez una fórmula contingente, puesto que su antecedente es una fórmula existencial contingente (dado que la negación de una fórmula contingente es a su vez otra fórmula contingente), cosa que se puede observar mejor en su equivalente: $(Ex)\sim A_1 \longrightarrow (x)A_2$; y ningún sistema lógico que emplea dominios no vacíos de interpretación permite la derivación de una fórmula universal contingente a partir de una fórmula existencial contingente.

(2).- Si $(x)A_1$ es contingente y $(x)A_2$ es inconsistente (- (contradictorio o lógicamente falso).- El condicional $\sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_2$ no es una fórmula lógicamente válida, puesto que el antecedente

---

(*).- En estas cifras que aparecen al lado isquierdo de cada subcaso de isquierda a derecha: los guarismos de la parte entera indican el número del teorema y del subcaso respectivamente; luego, el guarismo de la parte decimal (o guarismos) indica el valor de i en S'.

te de este condicional es contingente, mientras que su consecuente es inconsistente; por tanto, habrá cuando menos una asignación de los valores de verdad que asigne el valor "V" al antecendente, y como en este caso el consecuente siempre tiene el valor "F" el condicional resultará falso para esta interpretación.

(3).- Si $(x)A_1$ es inconsistente y $(x)A_2$ es consistente.- Aqui tambien el condicional $\sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_2$ es lógicamente inválido. La demostración es similar al caso anterior.

(4).- Si $(x)A_1$ y $(x)A_2$ son ambas inconsistentes.- El condicional $\sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_2$ es siempre lógicamente inválido, puesto-que, su antecedente es lógicamente válido (ya que la negación de una fórmula inconsistente o lógicamente contradictorio es siempre una formula 1-válida) y su consecuente es inconsistente.

Por tanto, de (1) - (4), se sigue, que ningún condicional de la forma $(Ex)\sim A_1 \longrightarrow (x)A_2$ es 1-válida, a menos que su antecedente-sea inconsistente o su consecuente sea lógicamente válido; pero decir esto último equivale simplemente a decir que el equivalente "$(x)A_1$ v-$(x)A_2$" de este condicional es 1-válido si cuando menos $(x)A_1$ es 1-válido o $(x)A_2$ es 1-válido, y asi, llegamos nuevamente al caso (i), y en consecuencia, a la conclusión decisiva de, que una fórmula de la -forma $(x)A_1 v (x)A_2$ es 1-válida únicamente si cuando menos uno de sus -mienbros es 1-válido, y sólo en este caso.

De este modo, dada una fórmula cualquiera de la forma $(x)A_1$-$v(x)A_2$, siempre será posible determinar su validez, para la cual, bastará proceder como en el caso (i), pero teniendo en cuenta la siguiente restricción: una vez borrados a todos los cuantificadores y variables individuales adscríbase un mismo subíndice a todas las letras -predicados de cada U-esquema, pero usando un subíndice distinto para-cada caso. Esta restricción se deriva del siguiente hecho. Dada una fórmula cualquiera de la forma $(x)A_1 v (x)A_2$, puede ocurrir que ninguno de sus mienbros sea 1-válido, y por tanto, que esta fórmula no sea válida; pero, sin embargo, si simplemente se borrara a los cuantificadores y variables individuales, y no se adscribieran subíndices a las -letras predicados, el esquema S_p' (es decir, $A_1 v A_2$) podría resultar-tautológicamente válido. Para evitar una consecuencia asi desagrada ble es lo que se prescribe esta restricción. Está claro que tal restricción sólo es necesario siempre cuando el número de U-cuantificadores es ≥ 1.

Esta restricción para mayor claridad, podría ser ilustrado con el siguiente ejemplo. Sea $(x)A_1 v (x)A_2$ la fórmula $(x)(FxvGx)v(x)(\sim Fx. \sim Gx)$, entonces, borrando simplemente a los cuantificadores y x's, tenemos el esquema S'_p : $(FvG)v(\sim F. \sim G)$, luego, distribuyendo "v" sobre "." :

$FvG \sim F.FvGv \sim G$ la fórmula $(x)A_1 (x)A_2$ resulta indebidamente válido. Mientras que adscribiendo subíndices, se tendría$(F_1 vG_1)v(\sim F_2 . \sim G_2)$, y luego distribuyendo como antes: $(F_1 vG_1 \sim G_2).(F_1 vG_1 v \sim G_2)$, resulta un esquema no válido, como es debido

12.m.- Aplicando la siguiente equivalencia proposicional universalmente válido (al que abreviaremos con (E1) por comodidad) :

$$(P_1 vP_2 v. . . vP_n):\Longleftrightarrow: \sim P_1 \longrightarrow (P_2 v. . . . . vP_n).v. \longrightarrow \sim P_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_n \qquad \text{(E1)}$$

a la fórmula $(x)A_1 v(x)A_2 v. . . v(x)A_m$, tenemos:

S' $$\sim (x)A_1 \longrightarrow ((x)A_2 v. . . v(x).v. \longrightarrow \sim (x)A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow (x)A_m$$

y, ahora aplicando otra equivalencia igualmente válida:

$$P \longrightarrow (Q_1 vQ_2 v. . . vQ_n):\Longleftrightarrow:(P \longrightarrow Q_1)v(P \longrightarrow Q_2)v. . . v(P \longrightarrow Q_n) \qquad \text{(E2)}$$

a cada uno de los condicionales con consecuencia compuesta en esta fórmula, tenemos:

S'_2 $$\sim(x)A_1 \longrightarrow (x)A_2 .v. . . v. \sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_m .v. \sim (x)A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow (x)A_m$$

De esta manera, a la fórmula S''_c hemos reducido a una serie de disyunciones de condicionales elementales de la forma ya tratada en el subcaso 12.1. Por tanto, para determinar la validez de S'_1 será suficiente con determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema S''_p

$$A_1 vA_2 v. . . vA_m$$

que resulta de borrar en S_1' a todos los cuantificadores y variables - individuales, y luego, adscribir un mismo subíndice a todas las le - tras predicados de cada U-esquema, pero siempre usando un subíndice - distinto para cada U-esquema distinto de otro U-esquema A_j.

En esta forma se ha demostrado que cualquier fórmula de la - forma $(x)A_1,\ldots, (x)A_m$ es decidible.

Pero, un procedimiento tal como se acaba de construir sería- un tanto laborioso, ya que para cada fórmula S' habría que construir - otra fórmula equivalente S_c', y procedimiento donde se pudiera omitir este paso sería de más importancia práctica que ésta. Pero, afortunadamente, aqui también es posible omitir este paso, como sigue.

En primer lugar, entre las fórmulas S', S_c'' y S_p'' existen- las siguientes relaciones:

(1) El conjunto de matrices de S_p'' (es decir, reconstruyendo los U - operandos y variables individuales como en S_c'') es idéntico al conjunto de matrices de S_c'', excepto en que, las matrices de S_c'' tienen U-cuantificadores al frente.

(2) El conunto de matrices de S_c'' es veritativo- funcionalmente e- quivalente al conjunto de matrices de S', excepto en que, las matrices de S_c'' están en FND.

En segundo lugar, de los casos (i) y (ii) se sigue, que

(3) S_c'' es 1-válido, unicamente si su estructura veritativo-funcional (es decir, el esquema S_p'') es tautológicamente válida.

Pero, (1) y (2) implican a su vez :

(4) El conjunto de matrices de S_p'' es veritativo-funcionalmente equivalente al conjunto de matrices de S', y

finalmente, de (2), (3) y (4) se deduce:

(5) S' es 1-válida, únicamente si su estructura veritativa-funcional es tautológicamente válido.

Por tanto, las reglas decisorias para determinar la validez-de cualquier fórmula de la forma $(x)A_1, \ldots, (x)A_m$ que se derivan de este teorema son las siguientes :

RL. Para determinar la validez de cualquier fórmulas S´de la forma $(x)A_1, \ldots, (x)A_m$ basta proceder como sigue :

(1) Si el número de los U-cuantificadores es ≤ 1, bórrese simplemente al U-cuantificador y variables individuales y, luego, determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

(2) Si el número de los U-cuantificadores es ≥ 2, bórrese a todos los U-cuantificadores y variables individuales y, luego, adscríbase un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada U-esquema pero, siempre usando un subíndice distinto para cada U-esquema A_i distinto de otro A_j, y finalmente, determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

TEOREMA II.

Sea S´ una fórmula de la forma $(Ex)B_1, \ldots, (Ex)B_1$, donde, conforme a la página 3 hay un número n (finito) $1 \leq i \leq n$, de E-fórmulas básicas, y las únicas conectivas proposicionales que intervienen en esta fórmula son únicamente "v", "." y/o "$\sim$" internada esta última. Toda fórmula S´ de esta forma es decidible.

PRUEBA.- Dada cualquier fórmula S´ de la forma $(Ex)B_1, \ldots, (Ex)B_n$, hay una fórmula equivalente S'_c en forma normal conjuntiva, que se obtiene a partir de las E-fórmulas de S´ tomando a cada $(Ex)B_i$ en bloque como si fuera simples letras proposicionales. Sea

$$((Ex)B_1 v..v(Ex)B_k)_1 \ldots\ldots ((Ex)B_1 v\ldots v(Ex)B_k)n \qquad S'_c$$

la FNC asi obtenida. En esta fórmula, por las mismas razones que en el anterior teorema, también podemos hacer las simplificaciones necesarias. De este modo, por un lado, en virtud de la equivalencia

$$((Ex)B_1 v\ldots v(Ex)B_k) \Longleftrightarrow (Ex)\ (B_1 v\ldots vB_k)$$ transformamos a cada mienbro i de S'_c en una fórmula equivalente de la forma (Ex) - $(B_1 v\ldots vB_k)_i$; por otro lado, en cada mienbro i de S'_c asi transformado denotaremosa cada operando $(B_1 v\ldots vB_k)_i$ simplemente por una letra mayúscula B con un subíndice adscrita a ella. En esta forma, convertimos a S'_c en otra fórmula esquemáticamente equivalente

$(Ex)B_1 \ldots\ldots (Ex)B_n$ S''_c

Ahora bien, para demostrar que S' es decidible será suficiente con demostrar que cualquier fórmula de la forma S''_c es decidible; y para demostrar que S''_c es decidible será suficiente con demostrar:

(i) Que S''_c es 1-válida si y sólo si cada $(Ex)B_i$ es 1-válida,

(ii) Que existe un procedimiento efectivo para determinar esta validez.

CASO (i).- Que S''_c sea válida únicamente si se satisface la condición estipulada por este caso es por demás evidente. Lo único que falta ser demostrado aqui es la decidibilidad de la validez de cualquier fórmula individual $(Ex)B_i$. Esta demostración es similar a la del caso (i) del teorema anterior. Una fórmula $(Ex)B_i$ es 1-válida únicamente si su operando es tautológicamente válido. Esta aserción se deriva como sigue. El operando de la fórmula $(Ex)B_i$ es un esquema abierto, y todo esquema abierto, en cuento se refiere a su validez se comporta exáctamente igual que los esquemas proposicionales. De aqui, que B_i sea válido sólo si lo es tautológicamente. Pero, si B_i es válido tautológicamente, es válido universalmente, es decir, la cuantificación universal de B_i es 1-válido. Por tanto, $(Ex)B_i$ tambien será válido, puesto que, si B_i es válido universalmente, lo será tambien existencialmente.

CASO (ii).- Si de acuerdo al caso anterior, S''_c es 1-válido si y sólo si cada E-fórmula $(Ex)B_i$ es 1-válida y, cada E-fórmula $(Ex)B_i$ es 1-válida únicamente si su operando es tautológicamente válido, entonces, para saber si S'_2 es 1-válida será suficiente con borrar a todos los cuantificadores y variables individuales y luego determinara veritativo-funcionalmente la validez del esquema S''_p resultante:

$$B_1 \ldots\ldots B_n$$

De este modo, se ha demostrado que toda fórmula de la forma $(Ex)B_1, \ldots, (Ex)B_n$ es decidible.

Pero, un procedimiento asi resultaría un poco laborioso, puesto que para determinar la validez de S' siempre habría que hallar primero su FNC y, por tanto, un procedimiento que permitiera omitir -

este paso tendría más importancia práctica que ésta. Pero aqui también, asi como en el teorema anterior, es posible omitir este paso, y por ende, hacer de este procedimiento, un instrumento de reglas muy simples. Esto procede como sigue.

En primer lugar, entre las fórmulas S', S''_c y S''_p existen las siguientes relaciones:

(1) El conjunto de matrices de S''_p (esto es, sobreebrendiéndose una "x" detrás de cada letra predicado en este esquema) es idéntico al conjunto de matrices de S''_c (esto es, E-operandos), excepto en que las matrices de esta última exhiben E-cuantificadores al frente.

(2) El conjunto de matrices de S''_c es veritativo-funcionalmente equivalente al conjunto de matrices de S', excepto en que, las matrices de S''_c están en FNC.

En segundo lugar, de los casos (i) y (ii) se sigue

(3) Que S''_c es 1-válida únicamente si su estructura veritativo-funnal (esto es, S''_p) es tautológicamente válida.

Pero, (1) y (2) implican a su vez

(4) El conjunto de matrices de S''_c es veritativo-funcionalmente equivalente al conjunto de matrices de S'.

Y, finalmente, de (2), (3) y (4) se deduce:

(5) S' es 1-válida, únicamente si su estructura veritativo-funcional es tautológicamente válido (y, por tanto, S) únicamente si el esquema S'_p

$$B_1, \ldots, B_n$$

que resulta de borrar en S' a todos los E-cuantificadores y variables individuales es tautológicamente válida.

Por tanto, las reglas de decisión para cualquier fórmula de la forma $(Ex)B_1, \ldots, (Ex)B_n$ que se derivan de este teorema serán las siguientes:

R2. Para determinar la valides de cualquier fórmula S' de la forma-

$(Ex)B_1,\ldots,(Ex)B_n$ basta proceder como sigue: borrar a todos los E-cuantificadores y variables individuales y, luego, determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante. De este modo S será 1-válida únicamente si S'_p lo es, de otro modo, S (y, por tanto, S´) será lógicamente inválido.

TEOREMA III.

Toda fórmula S´ de la forma $(x)A_1,\ldots,(x)A_m$, $(Ex)B_1,\ldots,(Ex)B_n$ es una fórmula decidible.

De acuerdo a la página 3- por un lado en la fórmula básica S´ intervienen únicamente las conectivas proposicionales "v", "." y/o "$\sim$" (internada esta última). Por otro lado, S´exhibe únicamente dos tipos de fórmulas: Universal y existencial. De esta manera, en S´ una fórmula $(x)A_i$ y una fórmula $(x)A_j$, o una fórmula $(Ex)B_i$ y una fórmula $(Ex)B_j$, o una fórmula $(x)A_i$ y una fórmula $(Ex)B_i$, estarán coligados o por una "v" o por una".", donde $i \neq j$, e $i \geqq 1$ y $j \geqq 1$, y m y n son enteros positivos finitos arbitrarios.

Por tanto, de aqui se sigue, que:

1.- Las formas basicas posibles de fórmulas que pueden construirse separadamente, primero a partir de U-fórmulas elementales $(x)A_i$, y segundo, a partir de E-fórmulas elementales $(E\,x)B_i$, en base a las conectivas "v" y "." son las siguientes:

a) $(x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \ldots \vee (x)A_m$ c) $(E\,x)B_1 \vee (E\,x)B_2 \vee \ldots \vee (Ex)B_n$

b) $(x)A_1 . (x)A_2 . \ldots . (x)A_m$ d) $(Ex)B_1 . (Ex)B_2 . \ldots . (Ex)B_n$

2.- Las fórmas básicas posibles de S´, o partes de S´ que pueden construirse a partir de las fórmulas anteriores a) - d) en base a las conectivas "V' y "." son las siguientes :

1. $((x)A_1 v (x)A_2 v \ldots v (x)A_m) v ((Ex)B_1 v (Ex)B_2 v \ldots v (ex)B_n)$

2. $((x)A_1 v (x)A_2 v \ldots v (x)A_m) . ((Ex)B_1 v (Ex)B_2 v \ldots v (Ex)B_n)$

3. $((x)A_1 v (x)A_2 v \ldots v (x)A_m) v ((Ex)B_1 . (Ex)B_2 . \ldots . (Ex)B_n)$

4. $((x)A_1 v (x)A_2 v \ldots v (x)A_m) . ((Ex)B_1 . (Ex)B_2 . \ldots . (Ex)B_n)$

5. $((x)A_1.(x)A_2.....(x)A_m)v((Ex)B_1v(Ex)B_2v...v(Ex)B_n)$

6. $((x)A_1.(x)A_2.....(x)A_m).((Ex)B_1v(Ex)B_2v...v(Ex)B_n)$

7. $((x)A_1.(x)A_2.....(x)A_m)v((Ex)B_1.(Ex)B_2.....(Ex)B_n)$

8. $((x)A_1.(x)A_2.....(x)A_m).((Ex)B_1.(Ex)B_2.....(Ex)B_n)$

Antes de demostrar que S´es decidible, a fin de evitar una demostración in extenso, es preciso simplificar estas fórmulas, en - número mínimo posible de fórmulas que sean lo bastante generales a - fin de que puedan comprender a todas las demás. Así tenemos, por un lado, que en virtud de las equivalencias $(x)A_1.(x)A_2.....(x)A_k.\Longleftrightarrow.$ $(x)(A_1.....A_k)$ y $(Ex)B_1v(Ex)B_2v...v(Ex)B_k .\Longleftrightarrow. (Ex)(B_1vB_2v...vB_k)$

las fórmulas 1-2 y 5-8 son respectivamente equivalentes a las siguien tes fórmulas:

1.´ $((x)A_1v(x)A_2v...v(x)A_m)v(Ex)\ (B_1vB_2...vB_n)$

2.´ $((x)A_1v(x)A_2v...v(x)A_m).(Ex)\ (B_1vB_2v...vB_n)$

5.´ $(x)(A_1.A_2......A_m)v(Ex)(B_1vB_2v...vB_n)$

6.´ $(x)(A_1.A_2......A_m).(Ex)\ (B_1vB_2v...vB_n)$

7.´ $(x)(A_1.A_2......A_m)v((Ex)B_1.(Ex)B_2.....(Ex)B_n)$

8.´ $(x)(A_1.A_2......A_m).((Ex)B_1.(Ex)B_2.....(Ex)B_n)$

Por otro lado, dado que, para los fines de la presente demos tración no intereza considerar la estructura lógica interna de los U- y E-operandos, podemos denotar en estas fórmulas a los U-operandos - $(A_1.A_2.....A_m)$ y E-operandos $(B_1vB_2v..,vB_m)$ simplemente por las le tras mayúsculas A y B, respectivamente. De esta manera, todas estas- fórmulas resultan ser sólo casos particulares de las fórmulas 3 y 4 ; reduciéndose por tanto, todos ellos únicamente a estas dos, como si - gue:

1° A la fórmula 3 se reducen las fórmulas 1´, 5´y 7´, porque estas- fórmulas no son mas que formas particulares que la fórmula 3 adopta , cuando (1) en $(Ex)B_i$ $i = 1$, (2) en $(x)A_i$ y en $(Ex)B_i$ $i = 1$, y (3) -

en $(x)A_i$ $i = 1$, respectivamente.

2° A la fórmula 4 se reducen las fórmulas 2´, 6´, y 8´, porque estas fórmulas no son mas que formas particulares que adopta la fórmula 4, cuando, (1) en $(Ex)B_i$ $i = 1$, (2) en $(x)A_i$ y en $(Ex)B_i$ $i = 1$, y (3) en $(x)A_i$ $i = 1$, respectivamente.

De este modo, dado que, las fórmulas 3 y 4 son las más generales, la demostración siguiente estará en parte basada únicamente en estas dos fórmulas.

Por tanto, para demostrar que S´es decidible, será suficiente con demostrar.

I. Que cualquier fórmula de las formas 3 y 4 son decidibles, y

II. Que cualquier otra combinación compleja posible de las fórmulas a) - d) de estas fórmulas tambien son decidibles.

PRUEBA.-

I. A) Si S´(o una parte de S´) es de la forma 3, es decir,

$$((x)A_1 v (x)A_2 v \dots v (x)A_m) v ((Ex)B_1 . (Ex)B_2 . \dots . (Ex)B_n)$$

S´ será lógicamente válida únicamente

(i) Si cuando menos una $(x)A_i$ o una $(Ex)B_i$ cualquiera es 1-válida, o

(ii) Si alguna $\sim (x)A_i$ implica a alguna $(Ex)B_i$, o

(iii) Si $\sim ((x)A_j v (Ex)B_i)$ implica $(x)A_k$, para $j \leq m$ y $k \leq m$.

CASO (i).- $(x)A_i$ es 1-válida o $(Ex)B_i$ es 1-válida.- En este caso, para determinar la validez de S´ son suficientes solamente las reglas derivadas del subcaso (i) de los teoremas I y II, respectivamente, de acuerdo a las cuales, para saber si S´es 1-válida, basta con borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales y luego, una vez adscrito los subíndice a las letras predicados de los U-esquemas (siempre que en $(x)A_i$ $i \geq 2$, y en $(Ex)B_i$ i puede tener cualquier valor finito), decidir veritativo-funcionalmente la validez del esquema de esta manera resultante.

CASO (ii). $\sim(x)A_i$ implica $(Ex)B_i$.- Aqui tenemos los siguientes subcasos :

32.11. Si en $(x)A_i$ $i = 1$, y en $(Ex)B_i$ $i = 1$

S' $(x)A_1 v (Ex)B_1$

S'_1 $\sim(x)A_1 \longrightarrow (Ex)B_1$

32.21. Si en $(x)A_i$ $i = 2$ y en $(Ex)B_i$ $i = 1$

S' $(x)A_1 v (x)A_2 v (Ex)B_1$

S'_1 $\sim((x)A_1 v (x)A_2) \longrightarrow (Ex)B_1$

. . . .

. . . .

. . . .

32.ml. Si en $(x)A_i$ i m y en $(Ex)B_i$ $i = 1$

S' $(x)A_1 v (x)A_2 v \ldots v (x)A_m v (Ex)B_1$

S'_1 $\sim((x)A_1 v (x)A_2 v \ldots v (x)A_m) \longrightarrow (Ex)B_1$

Internando las negaciones de las antecedentes en los subcasos 32.21........32.ml, tenemos respectivamente:

S'_2 $\sim(x)A_1 . \sim(x)A_2 . \longrightarrow . (Ex)B_1$

. . . .

. . . .

. . . .

S'_2 $\sim(x)A_1 . \sim(x)A_2 \ldots\ldots (x)A_m . \longrightarrow .(Ex)$-$B_1$

Ahora bien, en el primer subcaso, para determinar la validez de la fórmula $\sim(x)A_1 \longrightarrow (Ex)B_1$ es suficiente con borrar a todos-los cuantificadores y variables individuales del esquema equivalente-$(x)A_1 v (Ex)B_1$ y, luego, determinar veritativo-funcionalmente la vali-dez del esquema resultante. Que esto sea suficiente para determinar-la validez de cualquier fórmula, de esta forma aqui se sigue de la si - guiente interpretación de la derivación de la formula $(Ex)B_1$ a partir de la fórmula $(x)A_1$ dentro de cualquier sistema de derivación que tenga- como regla la Especificación Existencial (EE). Con este objeto vea - mos la estructura de la derivación:

(1)	$\sim (x)A_1$	P /	$(Ex)B_1$
(2)	$(Ex) \sim A_1$	(1)	interc. de Q.
(3)	$\sim A_1$	(2)	EE
.	.	.	
.	.	..	
.	.	.	
(1)	B_1	(L - i)	T
(L + 1)	$(Ex)B_1$	(L)	GE.

Como puede observarse fácilmente, la fórmula $(Ex) \sim A_1$ im - plica a la fórmula $(Ex)B_1$ únicamente si del esquema abierto $\sim A_1$ pue de derivarse veritativo-funcionalmente el esquema abierto B_1. Pero , si este es el caso (y, ya que el único propósito que se persigue es hallar algún procedimiento efectivo), para saber si la fórmula (Ex) - $\sim A_1$ implica a la fórmula $(Ex)B_1$ (o, equivalentemente, para saber - si la fórmula $(x)A_1 v (Ex)B_1$ es 1-válida), dado que implicación es vali dez del condicional[1], es suficiente con determinar la validez del es- quema $\sim A_1 \longrightarrow B_1$ (o, equivalentemente del esquema $A_1 v B_1$) con el - auxilio de cualquier procedimiento decisorio proposicional.

En los subcasos restantes , es decir, en 32.21,..., 32.ml, en virtud de la tautología.

$$((P_1.P_2.....P_{n-1}) \longrightarrow P_n) \Longleftrightarrow (P_1 \longrightarrow P_n.v.P_2 \longrightarrow P_n.v \text{ - } ...v.P_{n-1} \longrightarrow P_n)$$

las fórmulas S_2' se reducen respectivamente a las siguientes fórmulas- equivalentes:

1.- (W.V.O. Quine. Op. Cit. p. 208.

S_3' $(\sim (x)A_1 \longrightarrow (Ex)B_1)v(\sim (x)A_2 \longrightarrow (Ex)B_1)$

. . . .

. . . .

S_3' $(\sim (x)A_1 \longrightarrow (Ex)B_1)v(\sim (x)A_2 \longrightarrow (Ex)B_1)v\ldots v(\sim (x)A_m \longrightarrow$

$(Ex)B_1)$

De esta manera, ya que esta fórmulas no son mas que disyunciones de fórmulas de la forma del primer subcaso, para saber si las fórmulas S′ en estos subcasos son válidos, será suficiente con borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales, y luego adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada par de esquemas abiertos $(A_i vB_1)$, pero siempre usando un subíndice distinto para cada par distinto $(A_j vB_1)$, esto es, cuando $i \neq j$. Pero, estas fórmulas (S_3') son a su vez equivalentes a las otras siguientes:

S_4' $(x)A_1 v(x)A_2 v(Ex)B_{1_1}\ v(Ex)B_{1_2}$

. . . .

. . . .

. . . .

S_4' $(x)A_1 v(x)A_2 v\ldots V(x)A_m v(Ex)B_{1_1}\ v(Ex)B_{1_2} v\ldots v\ldots v(Ex)B_{1_m}$

que resulta de las fórmulas S_3' de definir a la conectiva "$\longrightarrow$" y luego conmutar a los mienbros de la disyunción. De este último resultado se sigue, que para determinar la validez de cualquier fórmula S′ de los subcasos 32.21,...,32.ml, es decir, cuando en $(x)A_i$ $i \geq 2$, suficiente con:

1. Sustituir a la E-fórmula $(Ex)B_1$ por una disyunción de m E-fórmulas idénticas a la E-fórmula $(Ex)B_1$ sustituída, esto es, por la disyunción $(Ex)B_{1_1}\ v(Ex)B_{1_2} v\ldots v(Ex)B_{1_m}$.

2. Borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales y, luego, adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada par de esquemas abiertos $(A_i vB_1)$, pero siempre usando un subíndice distinto para cada par distinto $(A_j vB_1)$. Y, finalmente

3. Decidir veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

En la práctica, las dos primeras reglas pueden integrarse en una sola donde, una vez borrados a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales, pueden sustituirse al E-esquema B_1 por una disyunción de m mienbros y, luego, adscribir subíndices como en 2 y finalmente, aplicar la regla 3 al esquema resultante.

32.12 Si en $(x)A_i$ $i = 1$ y en $(Ex)B_i$ $i = 2$:

$$S' \quad (x)A_1 . v. (Ex)B_1 . (Ex)B_2$$

$$S'_1 \quad \sim (x)A_1 . \rightarrow (Ex)B_1 . (Ex)B_2$$

. . . .

. . . .

. . . .

32.1n Si en $(x)A_i$ $i = 1$ y en $(Ex)B_i$ $i = n$:

$$S' \quad (x)A_1 . v. (Ex)B_1 . (Ex)B_2 . \ldots . (Ex)B_n$$

$$S'_1 \quad \sim (x)A_1 . \rightarrow . \ (Ex)B_1 . (Ex)B_2 . \ldots . (Ex)B_n$$

Las fórmulas S'_1 en estos subcaso, en virtud de la siguiente equivalencia.

$$P \rightarrow (Q_1 . Q_2 . \ldots . Q_n) . \Longleftrightarrow . \ (P \rightarrow Q_1) . (P \rightarrow Q_2) . \ldots . (P \rightarrow Q_n) \qquad \text{(E4)}$$

se transforman respectivamente a las siguientes fórmulas equivalentes

$$S'_2 \quad (\sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_1) . (\sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_2)$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$S'_2 \quad (\sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_1) . (\sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_2) . \ldots . (\sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_n)$$

Y estas fórmulas no son mas que conjunciones de condicionales elemental

no son

les de la forma S_1' del subcaso 32.11, por tanto, para saber si son válidas será suficiente con aplicar el mismo procedimiento pertinente a los subcasos 32.21,...,32,ml, con la diferencia que en estos últimos no se adscribirá subíndice alguno a las letras predicados de ningún U-esquema, ya que en estas fórmulas todas las U-fórmulas son idénticas (esto es, una vez definido "$\longrightarrow$"). Pero, si este es el caso, es decir, si no es necesario adscribir subíndices a las letras predicados de las U-fórmulas en estas fórmulas, para saber si las fórmulas S' de estos subcasos son válidas será suficiente con determinar la validez de aquellas fórmulas directamente, sin transformación previa alguna, aplicando cualquier procedimiento decisorio proposicional a los esquemas resultantes de borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales.

32.22. Si en $(x)A_i$ $i = 2$ y en $(Ex)B_i$ $i = 2$:

S' $(x)A_i \vee (x)A_2 .\vee. (Ex)B_1 . (Ex)B_2$

S_1' $\sim((x)A_1 \vee (x)A_2) . \longrightarrow . (Ex)B_1 . (Ex)B_2$

....

....

....

32.mn. Si en $(x)A_i$ $i = m$ y en $(Ex)B_i$ $i = n$:

S' $(x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \ldots \vee (x)A_m .\vee. (Ex)B_1 . (Ex)B_2 . \ldots . (Ex)B_n$

S_1' $\sim((x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \ldots \vee (x)A_m) . \longrightarrow (Ex)B_1 . (Ex)B_2 \ldots\ldots (Ex)B_n$

Aplicando (E4) a estas fórmulas, tenemos:

S_2' $\sim((x)A_1 \vee (x)A_2) \rightarrow (Ex)B_1 . \sim((x)A_1 \vee (x)A_2) \rightarrow (Ex)B_2)$

....

....

....

S_2' $\sim((x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \ldots \vee (x)A_m) \rightarrow (Ex)B_1 . \sim((x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \ldots \vee (x)A_m) \longrightarrow (Ex)B_2 \ldots\ldots \sim((x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \ldots \vee (x)A_m) \rightarrow (Ex)B_n$

Eliminando a la conectiva "$\rightarrow$" de estas fórmulas:

S_3' $(x)A_1 \vee (x)A_2 \vee (Ex)B_1 . (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee (Ex)B_2$

....

....

....

S'_3 $(x)A_1 v (x)A_2 v\ldots v(x)A_m v (Ex)B_1 . (x)A_1 v (x)A_2 v\ldots v(x)A_m v(Ex)B_2 \ldots\ldots (x)A_1 v(x)A_2 v\ldots v(x)A_m v(Ex)B_n$

Y, estas fórmulas no son más conjunciones de las fórmulas S' de los subcasos 32.21,...,32.m_1, por tanto, para decidir la validez de estas fórmulas será suficiente con aplicar las reglas decisorias pertinentes a tales subcasos a cada miembro de estas conjunciones.

Por tanto, del análisis de la decidibilidad de todos estos casos de S' (o partes de ésta) de la forma 3, se sigue, que para decidir la validez de las fórmulas de esta forma de cualquier longitud finita, es suficiente con llegar a una disyunción de U- y E-fórmulas, o a una conjunción de disyunciones de U- y E-fórmulas. Pero estas fórmulas para la decisión a que se llegan no son mas que formas normales conjuntivas de sus correspondientes fórmulas S', y de este modo, la equivalencia (E4) no viene a ser otra cosa que el equivalente a la equivalencia de la distribución de "v" sobre ".": $PV(Q_1.Q_2\ldots\ldots Q_n) \Longleftrightarrow .(PvQ_1) . (PvQ_n)$. En consecuencia, para determinar la validez de cualquier fórmula de la forma 3 será suficiente con hallar su FNC - cosa que se verá con más detenimiento más adelante - y luego aplicarlas reglas de la página 48 Sin embargo, por fines de comodidad práctica, es preciso hacer las observaciones siguientes: aunque este tratamiento general (esto es, hallar FNC, adscribir subíndices etc.) es perfectamente aplicable a todos los subcasos de S' de la forma 3, no es recomendable aplicar a los subcasos 32.12,...,32.1n, puesto que como se ha demostrado, en estos casos, para decidir la validez de S', es suficiente con borrar a todos los cuantificadores y variables individuales y, luego, someter a cualquier procedimiento decisorio proposicional al esquema S'_p resultante, siendo, por tanto, supérfluo en estos casos la adscripción de subíndices a las letras predicados y cualquier otra transformación de S' o del esquema resultante de ésta. En contraste con este hecho, en cambio, la adscripción de subíndices y todas las demás transformaciones de S' en los subcasos restantes facilitan enormemente la operación de decisión. Pero, también en tales casos, es perfectamente posible decidir la validez de las fórmulas sin el recurso a tales expedientes. Esto puede bos quejarse brevemente como sigue:

(i) $(x)A_i$ es 1-válido o $(Ex)B_i$ es 1-válido.- En este caso para saber si S´1-válida, sea cual sea la longitud de S´siempre - que ésta sea finita, es suficiente con borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales y, luego, comprobar-veritativo-funcionalmente si algún U-esquema A_i es 1-válida, o cada E-esquema B_i es 1-válida. Si se satisface alguna de estas condiciones, S´es 1-válida.

(ii) $\sim(x)A_i$ implica $(Ex)B_i$.- En este caso, para saber si S´- es 1-válida, una vez borrado los U- y E-cuantificadores y variables individuales es suficiente con constatar si el U-esquema - de alguna U-fórmula $(x)A_i$ negada implica a cada uno de los E-esquemas B_i. Si este es el caso, S´es 1-válido. Como resulta - evidente, este proceso sería en esta forma sumamente laborioso- y tedioso.

(iii) $\sim((x)A_j v(Ex)B_i)$ implica $(x)A_k$, para $j \leq m$, $k \leq m$ e - $i \leq n$.

Este caso se reduce simplemente al caso anterior, como se verá enseguida.

Estas observaciones demuestran que el uso de subíndices (o de cualquier otro signo que desempeña tal función) a las letras predicados, como también las transformaciones de S´(aunque esta última en menor medida), son simplemente meros artificios que - permiten decidir la validez de las fórmulas del caso, con la - mayor precisión y facilidad, y en un tiempo mínimo posible.

(iii) $((x)A_j v\ (Ex)B_i)$ implica, para $j \leq m$, $k \leq m$, e $i \leq n$

Este caso, definiendo a la conectiva "$\rightarrow$" de implicación,- en virtud de la conmutatividad y asociatividad de "v", se reduce simplemente al caso (ii).

B) Si S´(o una parte de S´) es de la forma

$$(x)A_1 v(x)A_2 v\ldots v(x)A_m.(Ex)B_1.(Ex)B_2\ldots.(Ex)B_n$$

entonces, es muy evidente, que cualquier fórmula de esta forma- (de cualquier longitud finita), en virtud de su estructura conjuntiva, será 1-válida, únicamente si cada uno de sus miembros- son 1-válidos. Por tanto, para saber si S´es 1-válida, será suficiente con borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales y, luego, adscribir subíndices únicamente a las letras predicados de los U-esquemas (de acuerdo al subcaso (ii) - del teorema I), y finalmente, determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

II Cualquier otra combinación compleja posible S'de las fórmulas de las formas a)-d) es decidible.

La demostración de esta segunda condición se deriva de los - siguientes consideraciones sobre la primera:

1°.- A partir de las fórmulas de las formas a) - d) es posible - construir ocho formas básicas posibles de S'(a partes de S'),

2°.- Estas ocho formas básicas posibles que S'(o partes de S' pue de adoptar se reducen únicamente a las formas 3 y 4, por ser éstas últimas más generales que las demás,

3°. Las formas 3 y 4 son decidibles, para lo cual, es necesario- y suficiente únicamente con hallar sus FNC respectivas y, - luego aplicar ciertas reglas mecánicas a estas últimas.

De estas consideraciones se sigue que, para demostrar que - cualquier combinación compleja posible S'de las fórmulas de las formas a) - d) es decidible, será suficiente con demostrar que para cualquier fórmula S'es posible construir otra fórmula equivalente S'_c en FNC, y toda fórmula S'_c es decidible aplicando ciertas reglas mecánicas (como las dadas en la página). Esto es posible como sigue.

Dada cualquier fórmula S'de la forma $(x)A_1,\ldots,(x)A_m,(Ex)B_1,\ldots,(x)B_n$ para hallar otra fórmula equivalente S'_c en FNC, basta con proceder como en la lógica proposicional, tomando a cada $(x)A_i$ y a cada $(Ex)B_i$ como sigue si se tratan de simples letras proposicionales, sustituyendo a cada fórmula de la forma $X_1 v(X_2X_3)$ por - $(x_1 v x_2)$, donde cada x_i es una $(x)A_i$ o una $(Ex)B_i$, o una combinación de éstas. Sea

$$\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \ldots \cdot \phi_k$$

la FNC asi obtenida, donde una ϕ_i, sea por tanto:

a) $(x)A_1 v\ldots v(x)A_m v(Ex)B_1 v\ldots v(Ex)B_n$

b) $(x)A_1 v\ldots v(x)A_m$

c) $(Ex)B_1 v\ldots v(Ex)B_n$

Y, en estas posibles estructuras de ϕ_i, para facilitar el tratamiento podemos hacer algunas simplificaciones, como sigue. Por un lado, en virtud de la distributividad de los E-cuantificadores las fórmulas a) y c) se reducen respectivamente a las siguientes fórmulas equivalentes;

$(x)A_1 v\ldots v(x)A_m v(Ex)\ (B_1 v\ldots vB_n)$

$(Ex)(B_1 v\ldots vB_n)$

Por otro lado, ya que, para los fines de la presente demostración no se requieren tomar en consideración a la estructura lógica interna de los U- y E-operandos, podemos denotarla en estas fórmulas al operando $(B_1 vB_2 v\ldots vB_n)$ por la letra mayúscula B. De este modo, la estructura de S_c' sería la siguiente:

$((x)A_1 v\ldots v(x)A_m v(Ex)B_1)_1 \cdot\ldots\cdot((x)A_1 v\ldots v(x)A_m(Ex)B_n)_j \cdot((x)A_1 v\ldots v\ (x)A_m)_1 \cdot\ldots\cdot((x)A_1 v\ldots v(x)A_m)_k \cdot(Ex)B_1 \cdot\ldots\cdot(Ex)B_n$

Sea S_c' esta fórmula simplificada. En esta fórmula, los valores de un subíndice i cualquiera pueden ser las siguientes:

1. En las conjunción de U-fórmulas de cualquier miembro de las anteriores conjunciones: $1 \leq i \leq m$

1.2. El valor de i en (Ex)B de las anteriores conjunciones es igual al valor que asume i en 1.

En las conjunciones de disyunciones de U-fórmulas solas: $o \leq i \leq k$

2.1. Por tanto, el valor de i en la disyunción de U-fórmulas de cualquier miembro de estas conjunciones también será como en 2: $o \leq i \leq k$.

3. En la conjunción de E-fórmulas: $o \leq i \leq n$.

Por tanto, una fórmula S' cualquiera, será lógicamente válida únicamente si en el esquema S_p''

$(A_1 v\ldots vA_m vB_{1_1} v\ldots vB_{1_m})_1 \cdot\ldots\cdot(A_1 v\ldots vA_n vB_{n_1} v\ldots vB_{n_m})\ j\cdot(A_1 v\ldots v A_m)_1 \cdot\ldots\cdot(A_1 v\ldots vA_m)_k \cdot B_1 \cdot\ldots\cdot B_n$

que resulta de borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales y aplicar las reglas de la pág 48 a los j prime ros miembros, y las reglas derivadas de los teoremas I y II a - los k y n miembros restantes, respectivamente, en la fórmula S_c'' cada uno de los miembros de esta conjunción resultan veritativo-funcionalmente válidos.

En esta forma, se ha demostrado que cualquier fórmula S′ es decidible.

Este es un método aparentemente laborioso, pero en realidad no lo es, porque si bien es cierto, que tiene algunas desventa-- jas frente a otros métodos ya existentes, es verdad también que- estas desventajas quedan superadas o cuando menos compensadas - por otras ventajas que posee este procedimiento. En primer lu-- gar, porque ni el uso de la FNC ni el uso de los subíndices es - obligatorio en todos los casos de S′, como puede verse inspeccio- nando brevemente:

(1) Cuando en S′ el número de la U-fórmulas es $<$ 2, no se usa ni la FNC ni los subíndices, la validez de S′ se decide directamente borrando a todos los cuantificadores y variables individuales.

(2) Pero, tampoco cuando en S′ el número de las U-fórmulas es $\geq$ 2 es necesario el uso de ambos expedientes, sino, tan sólo del - primero, puesto que los subíndices son necesarios sólo cuando en algún miembro de FNC el número de las U-fórmulas es $\geq$ 2.

En segundo lugar, aunque resulta algo paradójico, el uso de la - FNC también resulta favorable a la sencillez del método, ya que, considerando en conjunto a todas las fórmulas de que consta S′, - muchas de ellas que ya se encuentra en FNC o exhiben a "." como- el operador de mayor jerarquía, una vez distribuídas en ésta úl- tima a todas las 'v' sobre '.', ya no se requiere hacer ninguna- otra transformación, basta aplicar las reglas de la página 44 a cada uno de los miembros de la FNC para decidir la validez de S′.

Por tanto, las reglas que se derivan de este teorema para la decisión de la validez de cualquier fórmula de la forma $(x)A_1$... ..,$(x)A_m$,$(Ex)B_1$,...,$(Ex)B_n$ son las siguientes:

A) Si el número de los U_cuantificadores es $\leq$ 1, se procede - en forma idéntica al R2

B) Si el número de los U-cuantificadores es $\geq$ 2, procédase su cesivamente como sigue:

(1) Siempre que se considere conveniente y sea posible, para - mayor simplicidad, redúzcase el número de los U-cuantificadores empleando las equivalencias $(x)A_1 \ldots\ldots (x)A_m . \Longleftrightarrow . (x)$ $(\_ \ldots\ldots A_m)$ y $(Ex)B_1 v \ldots v (Ex)B_n . \Longleftrightarrow . (Ex)B_1 v \ldots vB_n)$,

(2) Hállese la forma noraml conjuntiva, tomando a cada U- y E-- formúla en bloque como si fueran simples letras proposicionales,

(3) Bórrese a todos los cuantificadores y variables individua-- les y, luego:

(3.1) En cada miembro de la FNC, que contenga la disyunción de U- y E-esquemas, si el número de los U-esquemas es ≥ 2, sustitúyase a cada E-esquema B_i por la disyunción de m miembros $B_{i_1} v \ldots vB_{i_m}$ y, luego a todas las letras predicados - de cada disyunción bimembre $A_i vB_i$ adscríbase un mismo subíndice, pero usando un subíndice distinto para cada disyunción que difiera en el U-miembro. De otro modo, si el número de los U-esquemas es ≤ 1, procédase en forma similar a A).

(3.2) En los demás miembros de la FNC, procédase simplemente conforme a R1 o R2, según sea el caso.

(4) S (S´, etc.) será 1-válida únicamente si el esquema S'_p re-- sultante de estas operaciones es veritativo-funcionalmente- válido.

TEOREMA IV.

Sea S´una fórmula de la forma $(x)A_1, \ldots, (x)A_m, Ca_1, \ldots . Ca_r$ - donde, de acuerdo a la pág. 33 n y r son enteros positivos arbitrarios, y las únicas conectivas proposicionales que aparecen - son "v", "." y/o "~", internada esta última. La validez de - cualquier fórmula de esta forma es decidible, como sigue.

Antes de efectuar la demostración de este teorema, es preciso hacer la siguiente advertencia. De acuerdo a las reglas decisorias que aparecen en la primera parte de esta tésis cualquier- fórmula monádica básica que exhibe constantes individuales es decidible. Con este objeto, para cada una de las formas IV, V y - VI de S´que exhibe constantes individuales, por tanto, podría - construirse una demostración como de la forma III de S´(dado que en dicha forma S´tiene dos tipos de fórmulas), determinando un -

número mínimo de fórmulas de ciertas formas básicas, las cuales, o a partir de las cuales se construiría cualquier otra forma de S' que exhibe constantes individuales. Pero, esto sería innecesario, ya que, la validez de cualquier fórmula S' de las formas IV, V y VI también se funda en los mismos principios esenciales que la validez de las anteriores formas de S', como se verá en seguida. Por tanto, la demostración de este teorema y de las otras dos restantes será desarrollada de una manera bastante escueta, apoyándose en lo posible en los teoremas anteriores.

PRUEBA. Dada una fórmula S' cualquiera, hay otra fórmula equivalente S'_c en forma normal conjuntiva que se obtiene a partir de las fórmulas de S', tomando a cada $(x)A_i$ y a cada Ca_i en bloque como si fueran letras proposicionales. Sea

$$((x)A_1 v \ldots v (x)A_m v Ca_1 v \ldots v Ca_r)_1 \ldots\ldots ((x)A_1 v \ldots v (x)A_m v Ca_1 v \ldots v Ca_r)_j .$$

$$((x)A_1 v \ldots v (x)A_m)_1 \ldots\ldots ((x)A_1 v \ldots v (x)A_m)_k \; . \; (Ca_1 v \ldots v Ca_r)_1 \ldots\ldots$$
$$(Ca_1 v \; v \ldots \; Ca_r)_n$$

La FNC asi obtenida, es decir, la fórmula S'_c.

Ahora bien, para demostrar que S' es decidible, será suficiente con demostrar que cualquier fórmula de la forma S'_c es decidible, y para demostrar que S'_c es decidible será suficiente con demostrar que cada uno de sus miembros también lo son. De este modo:

a) Planteando los casos de validez para los primeros j miembros de esta fórmula, de un modo similar a los casos de validez de las formas anteriores de S', tenemos los siguientes subcasos:

41.11 Si i = 1, tanto en $(x)A_i$ como en Ca_i:

S' $\quad (x)A_1 v Ca_1$

Por tanto, si esta fórmula es válida, también debe serlo $S'_1 \quad (x)A_1 \longrightarrow Ca_1$

$S'_2 \quad (Ex) \sim A_1 \longrightarrow Ca_1$ (Internando la negación del antecedente) ......

....

....

....

41.mr. Si $i = m$ e $i = r$, en $(x)A_i$ y Ca_i, respectivamente:

S' $(x)A_1 v \ldots v (x)A_m v Ca_1 v \ldots v Ca_r$

procediendo como en 41.11:

S'_1 $\sim((x)A_1 v \ldots v(x)A_m) . \longrightarrow . Ca_1 v \ldots v Ca_r$

S'_2 $\sim(x)A_1 \ldots\ldots \sim(x)A_m . \longrightarrow . Ca_1 v \ldots v Ca_r$

En el caso 41.11, resulta patentemente claro que ninguna -fórmula de la forma $(Ex)\sim A_1 \longrightarrow Ca_1$ es 1-válida en sistema alguno de la lógica de predicados, a menos que en esta fórmula el antecedente $(Ex)\sim A_1$ sea lógicamente inconsistente (o contradictorio) o el consecuente Ca_1 sea lógicamente válido; pero decir esto equivale a decir, que su equivalente $(x)A_1 v Ca_1$ es válido si - cuando menos $(x)A_1$ es válido o Ca_1 es válido, y si este es el caso, - y en realidad esta es la única posibilidad de validez del-S' de este subcaso -, pues, basta borrar al U-cuantificador y a - todos los x's de $(x)A_1$ y a todas las constantes individuales de - Ca_1, y luego, adscribir un mismo subíndice a todas las letras - predicados del U-esquema A_1, haciendo otro tanto igual con las - letras predicados de C_1, pero usando un subíndice distinto. Aquí del hecho de borrar a la constante a_1 no puede originarse ninguna ambigüedad, dado que, inmediatamente se le sustituye por un - subíndice distinto de las del U-esquema A_1. Y, en general, en lo que sigue, a cada letra predicado C_i y C_j que provengan de borrar distintas constantes a_j y a_j, se les adscribirán subíndices también distintos; y en lo que respecta a las letras predicados-de los U-esquemas, se procederá como siempre de acuerdo a las - reglas ya establecidas, pero usando subíndices distintos de las letras predicados de las constantes individuales.

41.mr. Aplicando la equivalencia (E^3) a la fórmula S'_2 tenemos:

S'_3 $(\sim(x)A_1 . \longrightarrow . Ca_1 v \ldots v Ca_r) v \ldots v (\sim(x)A_m . \longrightarrow . Ca_1 v \ldots v Ca_r)$

y, luego, aplicando la equivalencia (E2) a cada uno de los condicionales de esta fórmula, obtenemos, finalmente:

$(\sim(x)A_1 \longrightarrow Ca_1 .v \ldots v. \sim(x)A_1 \longrightarrow Ca_r) v \ldots v (\sim(x)A_m \longrightarrow Ca_1 .v \ldots v. \sim(x)A_m \longrightarrow Ca_r)$

es decir, una serie de disyunciones de condicionales de la forma S'_1 del caso 41.11. Por tanto, esta fórmula asi extendida será - 1-válida únicamente si en su equivalente:

$((x)A_1 vCa_1 .v...v.(x)A_1 vCa_r)v...v((x)A_m vCa1.v...v.(x)A_m vCa_r)$

que resulta de definir a la conectiva "$\rightarrow$", si cuando menos una $(x)A_i$ o una Ca_i es 1-válida. Pero, si las cosas son así, no tiene objeto extender a la fórmula S', basta simplemente con determinar veritativo funcionalmente la validez del esquema S'_p

$$A_1 v \ldots vA_m vC_1 v \ldots vC_r$$

que resulta de borrar en S'a todos los cuantificadores, variables y constantes individuales y, luego, adscribir subíndices a las letras predicados de los U-esquemas, como siempre, y hacer otro tanto similar con las letras predicados C_i, pero usando subíndices distintos de los de U-esquemas, como ya quedó establecido líneas arriba. De este modo, aquí queda comprendido también otros casos de validez de S', debido a la presencia de mas de una fórmula que exhibe constantes: la posibilidad de que una Ca_i implique Ca_j, o $((x)A_1 v...v(x)A_j vCa_1 v...vCa_r)$ implique $(x)A_1 v... v(x)A_k$, etc., (donde, $j \leq m$, $k \leq m$).

Por tanto, este procedimiento es efectivo para cualesquiera de los j primeros miembros de S'_1, ya que todos ellos son de la misma forma.

b) Para determinar la validez de los k miembros siguientes, como es evidente, basta apelar solamente a las reglas derivadas del teorema I.

c) Por último, para determinar la validez de los n miembros, basta con borrar a todas las constantes individuales y adscribir un subíndices distintos a cada letra predicado que provenga de borrar una constante individual distinta, y luego, sometar a cualquier procedimiento decisorio proposicional al esquema resultante. Que esto sea suficiente para determinar la validez de estos miembros de S'_1 proviene del hecho de que las fórmulas Ca_i se comportan en cuanto respecta a su validez, en forma exáctamente igual que las matrices de fórmulas cuantificadas, de tal modo que, también se podría tratarlas sin borrar a las constantes, pero ello se hace a fin de guardar uniformidad en el procedimiento.

De todas las pruebas precedentes, la más importante es la del enciso a), ya que,lo que intereza en esta forma de S'es la decidibilidad de la validez de fórmulas universales básicas- que exhiben constantes individuales, y no la decidibilidad de meras fórmulas universales ni de meras fórmulas con constantes- individuales sin fórmulas cuantificadas, y, en todo caso, estas últimas no son más que posibles consecuencias de la transformación de S´a S'_1, y son cuestiones ya resueltas. De esto se concluye, que dada una fórmula cualquiera S´de la forma $(x)A_1,\ldots,(x)A_m,Ca_1,\ldots,Ca_r$ para saber si se trata de una fórmula 1-válida, basta con borrar en ella a todos los cuantificadores y variables y constantes individuales, y luego, proseguir de acuerdo a las reglas establecidas en el enciso a). Sin embargo, - sería más preferible dejas establecidas a estas reglas que se - derivan de este teorema, en forma más explícita y ordenada, de la siguiente manera:

R4. Para determinar la validez de cualquier fórmula S´de la - forma $(x)A_1,\ldots,(x)A_m,Ca_1,\ldots,Ca_r$, es suficiente con:

(1) Borrar a todos los cuantificadores y variables individuales y, luego adscribir subíndices a las letras predicados- de los U-esquemas conforme a la regla R1.

(2) Borrar a todas las constantes individuales y, luego adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados que - provengan de borrar a una misma constante individual; por tanto, a las letras predicados que provengan de borrar - constantes individuales distintas, se les adscribirán también subíndices distintos. En la práctica, estas dos reglas pueden efectuarse simultáneamente.

(3) Someter a cualquier procedimiento decisorio proposicional- al esquema S'_p resultante de (1) y (2). Por tanto, S (S´, - etc.) será 1-válida únicamente si S'_p lo es tautológicamente.

TEOREMA V

Sea S´una fórmula de la forma $(Ex)B_1,\ldots,(Ex)B_n,Ca_1,\ldots,Ca_r$.

Procediendo de una manera análoga al teorema anterior, obtenemos la FNC de S´:

$((Ex)B_1 vCa_1 v\ldots vCa_r)_1 \cdot\ldots\cdot((Ex)B_n vCa_1 v\ldots vCa_r)_j \cdot(Ex)B_1 \cdot\ldots\cdot(Ex)B_n$.

$(Ca_1 v \ldots v Ca_r)_1 \ldots\ldots (Ca_1 v \ldots v Ca_r)_k$

donde, se han reducido el número de E-cuantificadores con el objeto de simplificar la demostración.

Planteando los casos generales de validez para cada una de las tres formas de miembros de S'_c como en el teorema anterior, lo único que se requiere demostrar aquí es la decidibilidad de los j primeros miembros, puesto que, los demás són los mismos que en del S'_c de los teoremas II y IV, y por tanto, ya constituyen una cuestión resuelta. De este modo, tomando a cualquier miembro $((Ex)B_i v Ca_1 v \ldots v Ca_r)_i$, tenemos:

51.11 Si $i = 1$ en Ca_i (y el valor de i en $(Ex)B_i$ puede ser cualquiera, ya que, hay una sola E-fórmula):

S' $(Ex)B_1 v Ca_1$

Por tanto, si esta fórmula es 1-válida, también ha de serlo

S'_1 $\sim (Ex)B_1 \longrightarrow Ca_1$ Internando la negación del antecedente:

S'_2 $(x) \sim B_1 \longrightarrow Ca_1$

....

....

....

51.1_r Si $i = r$ en Ca_i:

S' $(Ex)B_1 v Ca_1 v \ldots v Ca_r$

Procediendo como en 51.11, obtenemos:

S'_1 $(x) \sim B_1 . \longrightarrow Ca_1 . v \ldots v Ca_r$ Aplicando (E3)

S'_2 $(x) \sim B_{1_1} \longrightarrow Ca_1 . v \ldots v . \sim B_{1_1} \longrightarrow Ca_r$

51.11.- Para determinar la validez de la fórmula $(Ex)B_1 v Ca_1$ es suficiente con borrar el E-cuantificador, variables y constantes individuales y, luego decidir veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante. Esta regla se deriva de una interpretación de la validez de la fórmula (x) B_1 Ca_1 dentro de un sistema de derivación semilar a la interpretación de la validez de la fórmula (Ex) A_1 $(Ex)B_1$ hecha en el subcaso 31.11. Esta consideración es pues, suficiente, puesto que, en un sistema de derivación una fórmula de la forma (x) B_1 Ca_1 es válida únicamente si del operando B_1 (donde se han sustituido a todas las x's por la constante a_1) puede derivarse veritativo funcionalmente la fórmula Ca_1. Pero, entonces, por una parte, como lo único que importa en el presente caso es determinar la validez de la fórmula $(x)\sim B_1 \longrightarrow Ca_1$ (o de su equivalente $(Ex) B_1 v Ca_1$) de un modo efectivo sea por el medio que sea, pues, es suficiente con determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema $\sim B_1 \longrightarrow C_1$ (o equivalentemente, de $B_1 v C_1$), borrando a todos los x´s y a_1´s. Por otra parte, aqui, el hecho de borrar a las variables y constantes individuales no origina ninguna ambigüedad, puesto que, en esta fórmula hay un sólo tipo de letra constante y, por tanto, puede sobreentendérselas simplemente detrás de cada B_i y C_i, de la misma manera como se hizo con las x´s de la fórmula similar referida. Además asi como en los subcasos 32.12,....,32. ln, pág. 49 , debido a la presencia de una sóla fórmula universal para determinar la validez de S´ se demostró que era suficiente con borrar a todos los cuantificadores y variables individuales en aquellas fórmulas de dichos subcasos, aqui también, por razones muy similares, ya que, la presencia de una sóla letra constante en la fórmula S´del presente caso comporta las mismas peculiaridades (con respecto a los subíndices) que las U-fórmulas en los referidos subcasos, siempre que estemos frente a cualquier fórmula S´cuya forma esquemática sea $(Ex)B_1,...,(Ex)B_n$' $C_1a,...,C_ra$, donde un subíndice i cualquiera en esta fórmula: $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq i \leq r$, para determinar su validez bastará con borrar a todos los cuantificadores, x´s y a ś en ella, sin someterla a transformación previa alguna y, luego, comprobar veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

51.1r.- Definiendo a la conectiva "→" en la fórmula S'_2 obtenemos otra fórmula equivalente S'_3 : $(Ex)B_{1_1}$ $vCa_1 v...v(Ex)B_{1_r}vCa_r$, y a su vez esta última es tautológicamente equivalente a la fórmula S'_4 :

$(Ex)B_{1_1}$ $v...v(Ex)B_{1_r}$ vCa_1 $v...vcA_r$. De este último resultado se sigue que dada una fórmula de la forma $(Ex)B_1vCa_1v...vCa_r$, donde $1 \leq i \leq r$, para saber si es una fórmula 1-válida es suficiente con

(1) Sustituir a $(Ex)B_1$ por una disyunción de r miembros, donde cada miembro de esta disyunción sea idéntica a $(Ex)B_1$,

(2) Borrar a todos los cuantificadores, variables y constantes-

a qué fórmula Ca_i implica $\sim(Ex)B_1$ depende en gran medida de la -ingeniosidad del investigador, y por tanto, este procedimiento no es mecánico, un procedimiento decisorio tiene que ser mecánico.

2. Si la fórmula en cuestión no es válida, como dice Quine (1) el procedimiento podría continuarse hasta la eternidad y nunca -se podría saber a qué Ca_i implica la fórmula $\sim(Ex)B_1$.

b) Dado que r es un entero positivo finito, siempre se podría-saber en un número finito de pasos a qué Ca_i implica la fórmula-$(Ex)B_1$, para la cual, una vez internada la negación y borrado el cuantificador, bastaría proceder como sigue:

1° Sustituir a todos los x's por a_1 y, luego, ver si B_1 implica Ca_1; tanto, que la fórmula del caso es válida; y si esto sucediera, aqui se daría por terminado la operación, en caso contrario, se continúa con el siguiente paso.

2° Sustituir a todos los x's por a_2 en B_1, y proceder del mismo modo que en el paso anterior en todó lo demás. Si aqui, B_1 -implica Ca_2 se da por terminada la operación, de otro modo, se-sigue adelante,

.

.

.

r° Sustituir a todos los x's por a_i, y si aquí Ca_r es implicada por B_1, la fórmula en cuestión será válida, de no ser asi, se llegará a la conclusión de que se trataba simplemente de una fórmula no-válida.

Caso (ii).- También aui hay dos posibilidades, pero a diferencia de las dos anteriores, en este caso ambas son efectivas:

a) Podría determinarse a qué fórmula Ca_j implica una fórmula Ca_i, constatando sucesivamente a las siguientes posibilidades:

1° $\sim Ca_1$ implica Ca_2, o,....,o $\sim Ca_1$ implica Ca_r, o

2° $\sim Ca_2$ implica Ca_3, o,...,o $\sim Ca_2$ implica Ca_r, o

.

.

.

r - 1 Ca_r-1 implica Ca_r

dando por concluída la operación en cualquier paso r-i(i $\geq$ 1)--

---

(1) Quine. Op. Cit. P. 260

individuales en la fórmula resultante de (1), y luego

a) Adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada E-esquema B_1, pero, utilizando un subíndice distinto en cada E-esquema.

b) Empleando los mismos subíndices anteriores, adscribir un subíndice distinto a cada letra predicado que provenga de borrar una constante individual distinta.

En la práctica estas dos reglas se funden en una sola: borrar el E-cuantificador y a todos los x's y a_i's, y sustituir al E-esquema B_1 por una disyunción de r miembros, esto es, por B_{1_1} v...vB_{1_r}, donde cada B_{1_i} sea idéntico a B_1 y, luego, siguen los encisos a) y b) de (2) tal como se han establecido.

Estas reglas se fundan en el siguiente análisis de la validez de la fórmula ((Ex)B_1vCa_1v...vCa_r)$_i$.

Por un lado, dada una fórmula cualquiera de la forma (Ex)B_1vCa_1 v...vCa_r, puede ocurrir

(i) Que ~ (Ex)B_1 implique a una Ca_i. o

(ii) Que una ~ Ca_i implique a una Ca_j,

En el primer caso, considerando a la fórmula (Ex)B_1vCa_1v... vCa_r, tal y como es, y suponiendo que esta fórmula es 1-válida, se sabe que ~ (Ex)B_1 puede implicar a alguna fórmula Ca_i, pero si $1 \leq i \leq r$, no se sabría efectivamente a cuál de las r fórmulas podría implicar (Ex)B_1.

Algo similar sucede con el segundo caso, donde, dando por supuesto la validez de la fórmula en cuestión, se sabe que una fórmula Ca_i puede implicar a alguna fórmula Ca_j, pero si aquí igualmente $1 \leq i \leq r$, no se sabría efectivamente qué fórmula específica Ca_i podría implicar a qué otra fórmula Ca_j.

Frente a este problema habrían las siguientes posibles soluciones. Primero, sobre el caso (i) hay una alternativa:

a) Podría determinarse a qué fórmula Ca_i implica la fórmula ~(Ex)B_1, llevando el problema dentro de un sistema de derivación. Pero aquí hay dos obstáculos insalvables:

1. Si la fórmula en cuestión es válida, el éxito de determinar-

ahí donde uno se encuentre con una implicación, en caso contrario seguir hasta el final, donde si Ca_{r-1} implica Ca_r, la fórmula en cuestión será lógicamente válida, de otro modo, se habría tratado simplemente de una fórmula no válida.

b) Dado que las fórmulas Ca_i en cuanto se refiere a la validez se comportan de un modo exactamente igual que las letras proposicionales y el propósito principal aqui es determinar la validez, materia del presente análisis, entonces será suficiente con someter a $Ca_1 v \ldots v Ca_r$ a cualquier procedimiento proposicional efectivo.

De este modo, dada una fórmula cualquiera, cuya forma sea - como la del presente análisis, podría determinarse su validez - siempre y de un modo mecánico, simplemente apelando a la segunda posibilidad de solución del caso (i) y a cualquiera de las dos - posibilidades de solución del caso (ii). Evidentemente, habrían también otros casos más: (iii) que $((Ex)B_1 v Ca_1 v \ldots v Ca_j)$ implica $Ca_1 v \ldots v Ca_k$ (donde, $j \leq r$, $k \leq r$), etc., pero todos ellos - se reducen solamente a los dos casos anteriores en virtud de la conmutatividad de "v". Ahora bien, un procedimiento como se acaba de presentar en este análisis, resultaría enormemente laborioso y tedioso, y no podría servir para fines de un uso práctico. Pero aún asi, aqui lo importante, es que, lo que se acaba de presentar es de hecho un procedimiento decisorio; lo ideal sería - sintetizarla en una forma más simple y práctica, donde estén todas las posibilidades de implicación del enciso b) del análisis del caso (i) y del enciso a) del análisis del segundo caso. Y, precisamente, las reglas decisorias presentadas al principio del caso 51.1r constituyen esta síntesis ideal, y por tanto, consecuencia de este análisis.

Por otra parte, en la determinación de la validez de la fórmula S´no se puede borrar simplemente a las constantes individuales, sino, tiene que sustituírselas inmediatamente por subíndices distintos acaaaaconstancia distinta,porque podría darse el caso en que en alguna fórmula no válida se diera una disyunción de la forma $Ca_i \; v \sim Ca_j$,es decir,una disyunción no válida, puesto que $i \neq j$, de donde, si simplemente se borraran las constantes individuales resultaría falazmente tautológico el esquema $Cv \sim C$.

De aquí, que sea preciso adscribir distintos subíndices y cerrar paso a este resultado no deseable.

Por tanto, las reglas decisorias para la forma V de S´que se derivan de este teorema es como sigue.

R5. Para determinar la validez de cualquier fórmula S´de la forma $(Ex)B_1,\ldots,(Ex)B_n,Ca_1,\ldots,Ca_r$ basta con proceder como sigue:

A) Si en S´el número de tipos de letras constantes individuales es ≤ 1, y en $(Ex)B_i$ $1 \leq i \leq n$: bórrese a todos los cuantificadores,variables y constantes individuales,y,luego determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

B) Si en S´el número de tipos de letras constantes individuales es ≥ 2 y el número de las E-fórmulas es como en A), siempre que se considere adecuado o necesario, ejecútase los pasos siguientes en orden consecutivo:

(1) Redúzcase el número de E-cuantificadores empleando la equivalencia $(Ex)B_1 v\ldots v(Ex)B_n. \quad .(Ex)(B_1 v\ldots vB_n)$,

(2) Hállese la FNC, es decir, una fórmula equivalente S'_c,

(3) Reitérese el paso (1) nuevamente,

(4) Determínese la validez de cada uno de los tres tipos de miembros de S'_c como sigue:

a) Si es de la forma $(Ex)B_1 vCa_1 v\ldots vCa_r$:

1° Borrar el E-cuantificador y a todos los x´sy a´sy sustituir al E-esquema B_1 por una disyunción de r miembros, es decir, por B_{1_1} $v\ldots vB_{1_r}$, donde cada B_{1_i} sea idéntico a B_1, y ejecutar simultáneamente: 1°´ adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada E-esquema B_{1i}, pero utilizando un subíndice distinto en cada caso; 1°´´Empleando los mismos subíndices, adscribir un subíndice distinto a cada letra predicado que provenga de borrar cada constante distinta.

2° Determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

b) Si el miembro de S'_c es de la forma $(Ex)B_1\ldots.$ $(Ex)B_n$, aplíquese simplemente la regla R2.

c) Si el miembro de S'_c es de la forma $Ca_1 v \ldots v Ca_r$, - determínese su validez mediante cualquier procedimiento proposicional efectivo.

(5) S (S, etc.) será 1-válida únicamente si cada miembro de S'_c resulta 1-válida.

En la regla B), asi como en las demás reglas ya establecidas, es necesario observar que, por un lado, los pasos (1) y (3) son simplemente auxiliares, pudiendo prescindirse, por tanto, si asi se desea, aplicando la regla (4)-a) a cada E-esquema por otro lado, la presencia de los casos b) y c) en S'_c es muy - poco frecuente.

TEOREMA VI.

Sea S' de la forma $(x)A_1, \ldots, (x)A_m, (Ex)B_1, \ldots, (Ex)B_n, Ca_1, \ldots, Ca_r$ donde, en cada tipo de fórmulas un subíndice i cualquiera es $i \geq 1$, y m, n y r son enteros positivos finitos cualesquiera. Procediendo de un modo similar a los teoremas anteriores, obtenemos su forma normal conjuntiva, esto es, una fórmula equivalente S'_c:

$((x)A_1 v \ldots v (x)A_m v Ca_1 v \ldots v Ca_r)_1 \ldots ((x)A_1 v \ldots v (x)A_m v Ca_1 v \ldots v Ca_r)_j$.

$((Ex)B_1 v Ca_1 v \ldots v Ca_r)_1 \ldots ((Ex)B_n v Ca_1 v \ldots v Ca_r)_k$. $((x)A_1 v \ldots v (x)A_m v$

$(Ex)B_1 v Ca_1 v \ldots v Ca_r)_1 \ldots ((x)A_1 v \ldots v (x)A_m v (Ex)B_n v Ca_1 v \ldots v Ca_r)_n$

donde a su vez, se han reducido el número de los E-cuantificado sólo para los fines de la sencillez de esta demostración. Claro está, que en esta FNC también deberían aparecer tres tipos de miembros mas: disyunciones formadas únicamente por U-fórmulas, disyunciones formadas únicamente por E-fórmulas y disyunciones formadas únicamente por fórmulas que están constituídas sólo por letras predicados y constantes individuales. Sin embargo, no se han tomado en cuenta a estas disyunciones en esta fórmula, por una parte, porque en los teoremas anteriores ya se han demostrado que estas disyunciones son decidibles, y por otra otra parte, para evitar que esta FNC apareciera más compleja.

Para demostrar que la validez de S'_c es decidible (y, por tanto, S', 8, etc.), será suficiente con demostrar que cualesquiera de sus miembros son también decidibles. Pero, ya que los dos primeros tipos de miembros de esta fórmula ya están demostrado en los teoremas anteriores, bastará con demostrar que el último tipo de estos miembros son también decidibles.

De este modo, planteando los casos generales de validez de cualquier miembro $((x)A_1 v \ldots v(x)A_m v(Ex)B_i vCa_1 v\ldots vCa_r)_i$ y empleando las equivalencias universalmente válidas (E1) y (E2), tenemos:

63.111 Si tanto en $(X)A_i$ como en Ca_i $i = 1$:

S' $(x)A_1 v(Ex)B_1 vCa_1$

S'_1 $\sim (x)A_1 . \longrightarrow .(Ex)B_1 .v. \sim (Ex)B_1 \longrightarrow Ca_1$ (E1)

S'_2 $\sim (x)A_1 \longrightarrow (Ex)B_1 .v. \sim (x)A_1 \longrightarrow Ca_1 :v: \sim (Ex)B_1 \longrightarrow Ca_1$ (E2)

....

....

....

63.mlr Si en $(x)A_i$ $i = m$ y en Ca_i $i = r$:

S' $(x)A_1 v\ldots v(x)A_m v(Ex)B_1 vCa_1 v\ldots vCa_r$

S'_1 $(x)A_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow ((x)A_2 v(Ex)B_1 Ca_1 v\ldots vCa_r)$ $.v.$ $(x)A_2$ (E1)

$((Ex)B_1 vCa_1 v\ldots vCa_r).v. \sim (Ex)B_1 \longrightarrow (Ca_1 v\ldots vCa_r).v. \sim Ca_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow Ca_r$

S'_2 $\sim (x)A_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow (x)A_2 .v. \sim (x)A_1 \longrightarrow (Ex)B_1 .v. \sim (x)A_1 \longrightarrow Ca_1 .v\ldots v. \sim (x)A_1 \to Ca_r :v: \sim (x)A_2 \longrightarrow (Ex)B_1 .v. \sim (x)A_2 \longrightarrow Ca_1 v\ldots v \sim (x)A_2 \longrightarrow Ca_r :v: \sim (Ex)B_1 \longrightarrow Ca_1 v\ldots v \sim (Ex)B_1 \longrightarrow Ca_r :v: \sim Ca_1 \longrightarrow \ldots \sim Ca_r .$ (E2)

63.111.- Para que S' sea válida es suficiente con

(1) Sustituir a $(Ex)B_1$ por una disyunción de dos miembros, es decir, por $(Ex)B_{1_1}$ v $(Ex)B_{1_2}$, y luego en la fórmula resultante.

(2) Borrar a todos los cuantificadores, x's y a's. y adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de la disyun-ción de los dos primeros esquemas, y un subíndice distinto al de los dos últimos

tinto al de los dós últimos

(3) Determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante de (1) y (2)

Estas reglas para determinar la validez de S'se derivan -- del siguiente análisis de la fórmula S'_2 . S'_2 es una disyunción de tres condicionales, donde, por una parte, para determinar la validez del primer y el tercer condicional, de acuerdo a los - subcasos 32.11, y 53.11 basta con borrar a los cuantificadores, x's y a's en S' y luego determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema resultante. Por otra parte, para determinar la validez del segundo condicional de acuerdo al subcaso - 43.11 no basta simplemente con borrar al cuantificador x y a, - sino, es necesario adscribir subíndices distintos a las letras-predicados del esquema A_1 y del esquema C_1. Pero, entonces habría que adscribir subíndices en S'a las letras predicados del-primer y el tercer condicional. De esta manera, dado que hay - una sola E-fórmula, una misma letra predicado resultaría con - dos subíndices distintos, y esto no tiene sentido en el presente contexto. De aqui se sigue, que para determinar la validez-de S', es necesario sustituir a las E-fórmulas por una disyun--ción de dos miembros.

63.mlr.- En este caso general, S'_2 es una disyunción de tipos - de condicionales elementales tratados en los subcasos 31.ml y - 51.lr. Para determinar la validez de S'en tales subcasos fue -- necesario sustituir a $(Ex)B_1$ por una disyunción de m miembros - en el primero, y por una disyunción de r miembros en el segundo subcaso. Por tanto, como la fórmula S'_2 no es nada mas que una disyunción de tales condicionales, para determinar la validez-de S'en este caso será necesario sustituir a la E-fórmula por - una disyunción de m+r miembros, y luego, aplicar otras reglas - similares a las prescritas para el caso 61.111, que en seguida-se establecen ya en forma general.

R6. Para determinar la validez de cualquier fórmula S'de la - forma $(x)A_1,\ldots,(x)A_m,(Ex)B_1,\ldots,(Ex)B_n,Ca_1,\ldots,Ca_r$ es suficiente con:

(1) Siempre que se considere necesario y sea posible, redúzcase el número de los cuantificadores, empleando-las equivalencias de dichas constantes.

(2) Hallar la FNC, es decir, una fórmula equivalente S'_c,

(3) Reitérese el paso (1),

(4) Determínese la validez de cada uno de los tipos de miembros de S'_c como sigue:

a) Si el miembro de S'_c es de forma $((x)A_1 v...v(x)A_m v (Ex)B_1 vCa_1 v...vCa_r)$, donde el número de los U-cuantificadores y fórmulas que exhiben constantes individuales puede ser $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq i \leq r$, respectivamente:

1° Bórrese a todos los cuantificadores, x's y a_i's y sustitúyase al E-operando B por una disyunción de m-r miembros, es decir, por $B_{i_1} v...vB_{i_{n+r}}$, donde cada miembro sea idéntico a B_i, y luego ejecútese simultáneamente : 1° 'adscríbase subíndices a las letras predicados de los U-esquemas empleando m subíndices distintos, de acuerdo a la regla R1; 1°' 'adscríbase subíndices a las letras predicados de los E-esquemas como si se trataran de U-esquemas empleando m+r subíndices distintos; 1°''' adscríbase subíndices a las letras predicados C_i usando un subíndice distinto para cada letra que provenga de borrar constantes distintas.

2° Determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema S'_p resultante.

b) Si el miembro de S'_c es de la forma $(Ex)B_i vCa_1 v...vCa_r$ determínese su validez aplicando la regla R4.

(5) S' será 1-válido únicamente si cada uno de sus miembros resultan válidos.

Finalmente, antes de concluir con esta segunda parte de la presente tesis, es preciso justificar que, la presencia de letras proposicionales dentro de cualesquiera de las seis formas de S' presentadas al principio de esta segunda parte, no afecta la decidibilidad de esta fórmula de acuerdo con las reglas decisorias del método propuesto en la presente tesis. Esto es asi, por una sencilla razón. En cualesquiera de las seis formas de S' de acuerdo a los teoremas correspondientes, una fórmula S' cual quiera es 1-válida únicamente en dos casos fundamentales:

1° - cuando una fórmula ϕ_i es 1-válida en virtud de su propia estructura veritativo-funcional interna, o

2° - Cuando una fórmula ϕ_i cualquiera implica a otra fórmula ϕ_j cualquiera.

Evidentemente, aqui, en el primer caso, ϕ_i o es una $(x)A_i$, o una $(Ex)B_i$, o una Ca_i; en el segundo caso, ϕ con cualquiera de los subíndices, o es cualesquiera de las formas anteriores, o alguna combinación finita de las mismas. Pero, en definitiva, una fórmula ϕ_i o una fórmula $\phi_i \longrightarrow \phi_j$ en estos casos, tras despejar el esquema S'_p de acuerdo a las reglas pertinentes, es 1-válida si es posible llegar a cualesquiera de los siguientes resultados: $F_i \vee \sim F_i$ o $C_i \vee \sim C_i$ (donde $i \geq 0$), o lo que es lo mismo (con respecto a la validez) a: $F_i \longrightarrow F_i$ o $C_i \rightarrow C_i$.

De aqui se sigue, que si alguna fórmula compuesta por letras proposicionales es 1-válida dentro de una fórmula S', lo será únicamente en forma independiente de las fórmulas predicativas, ya que por identidad una letra cualesquiera (predicativa o proposicional) implica solamente a otra idéntica a si misma.

CONCLUSION

Esencialmente, la conclusión más importante que se desprende de la exposición del procedimiento decisorio propuesto en la presente tesis en las páginas anteriores es la siguiente: La validez o la no-validez lógica de toda fórmula predicativa depende únicamente, de su estructura veritativo-funcional. Pero - no evidentemente, de su estructura veritativo-funcional inmediata y explicita, , con la cual aparece normalmente toda fórmula, como resultado de despejar la estructura lógica de una expresión del lenguaje corriente, (porque, si tal fuera el caso, no tendría objeto la construcción de ningún procedimiento decisorio para tales fórmulas, ya que, bastaría solamente los procedimientos puramente proposicionales), sino, de una segunda estructura, implícita en la primera, determinada a partir de aquella en base a las propiedades de implicación existente entre las fórmulas predicativas. Esto es puede ver con mayor claridad examinando brevemente la siguiente descripción general de la estructura de la fundamentación de la decidibilidad de cualquier fórmula predicativa monádica de acuerdo a los teoremas de la sección precedente Sea S una fórmula predicativa de cualesquiera de las seis formas determinadas en la página 33 de la segunda parte de la presente tesis. Para determinar su validez, siempre que sea necesario, - es suficiente con efectuar sucesivamente las siguientes reglas:

(1) Eliminar a todas las conectivas "$\longrightarrow$", "$\longleftrightarrow$", etc., sustituyéndolas por sus equivalentes correspondientes, hasta reducir S a otra fórmula equivalente S', tal que ésta última exhiba únicamente las conectivas "v", "." y/o "$\sim$", internada ésta última

(2) Hallar la forma normal conjuntiva de S', tomando a cada fórmula predicativa en bloque, como si tratara de simples letras - proposicionales. Sea S'_c esta FNC.

(3) Decidir la validez de cada uno de los miembros de S'_c de - acuerdo a sus reglas pertinentes.

(4) S será l-válida únicamente si el esquema S'_p resultante de S'_c es veritativo-funcionalmente válido.

Ahora bien, la estructura veritativo-funcional de S en los pasos (1) y (2) todavía no ha sufrido ninguna transformación esencial, puesto que la estructura de las fórmulas S´y S'_c que resultan respectivamente de estos pasos, no son más que transformaciones directas de la estructura explícita de la fórmula original. La transformación esencial, suficiente y necesaria que sufre la estructura veritativo-funcional de S a través de su equivalente S'_c es en el paso (3). En este paso, S'_c es una fórmula de cualesquiera de las formas siguientes, o es una conjunción finita de algunas de ellas o de todas:

(i) $(x)A_1 v \ldots v(x)A_m$

(ii) $(Ex)B_1 v \ldots v(Ex)B_n$

(iii) $(x)A_1 \; v \ldots v \; (x)A_m v(Ex)B_1 v \ldots v(Ex)B_n$

(iv) $(x)A_1 \; v \ldots v(x)A_m \; vCa_1 v \ldots vCa_r$

(v) $(Ex)B_1 \; v \ldots v(Ex)B_1 vCa_1 v \ldots vCa_r$

(Vi) $(x)A_1 \; v \ldots v(x)A_m v(Ex)B_1 v \ldots v(Ex)B_n vCa_1$
$v \ldots vCa_r$

Este paso consiste, por un lado, en la transformación de cada uno de los miembros de S'_c en otras fórmulas equivalentes en virtud de las propiedades de implicación de las fórmulas predicativas(o, equivalentemente, en virtud de las propiedades de validez de la disyunción de las fórmulas predicativas) y las equivalencias proposicionales universalmente válidas (E1) y (E2); y, por otro lado, en la adscripción de subíndices a las letras predicados (siempre que ello sea necesario) después de borrar en S'_c así modificado, a todos los símbolos que no sean letras predicados, conectivas proposicionales y/o signos de agrupación.

Lo esencial del algoritmo propuesto, radica en la primera parte de este paso, ya que, la segunda parte, como ya se dijo a propósito de la forma III de S´(Pág. 47), es nada mas que un expediente que permite simplificar la ejecución del procedimiento. Todo lo demás, pues, es cuestión de detalle; aunque, es preciso aclarar algo respecto al teoremaI, que aparentemente queda fuera del esquema que se acaba de examinar, debido a que allí se emplea la FND y la FNC. En dicho teorema, la FND no tiene finalidad decisoria, sino, simplemente la de permitir simplificar la fórmula -

S´. Pero lo interesante, es que, tras simplificar a dicha fórmula, se obtiene una fórmula de la misma forma que la fórmula (i); es decir, en cuanto respecta a la forma I de S´es indiferente - que se use FNC o FND para fundamentar su decidibilidad, puesto - que empleando FNC se hubiera obtenido una conjunción finita de - fórmulas de la forma (i), y para demostrar su decidibilidad, hubiera sido suficiente con demostrar la decidibilidad de cualesquiera de sus miembros, ya que todos son de la misma forma; y precisamente, lo que se hizo en el teorema I, fue demostrar la decidibilidad de una fórmula cualesquiera de la forma (i).

Finalmente, como una segunda conclusión, es menester decir- -además, como ya se ha dicho en otra parte en forma detallada - (Pág. 50), consideración que es válida para todo el resto de las reglas- que, el procedimiento decisorio aqui presentado, desde el punto de vista de su uso práctico, es un instrumento de fácil manejo, claro está, con ciertas ventajas y desventajas frente a otros métodos ya existentes para la decisión de la validez de - fórmulas cuantificacionales monádicas de la Lógica de Primer Orden.

BIBLIOGRAFIA

ACKERMAN, WILHELM. Solvable Cases of the Decision Problem North Holland, Amsterdam, 1954.

COPI, IRVING. Symbolic Logic. The Macmillan Company, New York, 1970.

FERRO, J. B. Procedimientos Decisorios para las Fórmulas Cuantificacionales Monádicas de la Lógica de Predicados. Tesis presentado para optar el grado de doctor en Letras en la UNMS. Biblioteca de Letras, Ciudad Universitaria, UNMSM.

HILBERT DAVID Y ACKERMAN WILHELM. Lógica Teórica, Tecnos, Madrid; 1962.

HUNTER GEOFFREY. Metalogic, An Introduction to Metatheory of Standard First-Order-Logic. The Macmillan Company, New York, 1952.

KLEENE, STEPHEN COLE. Introduction to Metamathematics. North Holland, Amsterdam, Groningen, New York, 1952.

LIGHTSTONE, A. H. The Axiomatic Method. Prentice-Hall. Inc, New Jersey, 1964.

MENDELSON ELLIOTT. Introduction to Mathematical Logic. Van Nostrand Reinhold, New York, 1964.

MOSTERIN, JESUS. Lógica de Primer Orden. Ariel, Barcelona, 1970.

MOSTOWSKI. A. Sentences Undecidible in Formalized Arithmetic. North-Holland, Amsterdam, 1952.

PIAGET, JEAN Y BETH. E. W. Relaciones entre la Lógica Formal y el Pensamiento Real. Ed. Ciencia Nueva Madrid, 1968.

QUINE, WILLARD VAN ORMAN. Los Métodos de la Lógica. Ariel, Barcelona, 1969 (Reimpresión).

SUPPES, PATRICK. Introducción a la Lógica Simbólica. CECSA, México, 1966.

STAHL, GEROLD. Elementos de la Metalógica y la Metamatemática. Editorial Universitaria S. A. Snatiago de Chile, 1964.

TARSKI, A. MOSTOWSKI, A. Y. ROBINSON, R. Undecidible Tehories North-Holland, Amsterdam, 1953.

INDICE

I Introducción 1

PRIMERA PARTE

REGLAS DECISORIAS PARA LAS FORMULAS CUANTIFICACIONALES MONADICAS DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN.

1.- Reglas Decisorias para las Fórmulas Básicas 2
Algunos ejemplos de la aplicación de estas reglas 5
2.- Reglas Decisorias para las Fórmulas no-básicas 14
Fórmulas Complejas 14
Algunos ejemplos de la aplicación de estas reglas 15
Formas Normales Prenexas 19
Algunos ejemplos de la aplicación de estas reglas 20
3.- Reglas Decisorias para Fórmulas que contienen constantes individuales 24
Algunos ejemplos de la aplicación de estas reglas 27

Una breve referencia a la procedencia de algunos ejemplos de esta primera parte 31

SEGUNDA PARTE

FUNDAMENTOS DEL PROCEDIMIENTO DECISORIO PROPUESTO 33
Teorema I 34
Teorema II 40
Teorema III 43
Teorema IV 56
Teorema V 60
Teorema VI 67
Conclusión 72
Bibliografía 75
Indice 77